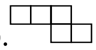
PROBLEMAS

1.- Una pieza de madera se forma pegando 5 cubos idénticos dispuestos de tal forma que sus caras en el plano forman la figura adjunta. Determinar todas las formas de ordenar este conjunto de 25 piezas para formar un cubo 5 x 5 x 5. (Rotaciones y simetrías de una cierta disposición no se consideran).

2.- Un viajero llega a un país en el cuál todos los habitantes son de dos tipos, siempre metirosos o que siempre dicen la verdad. El viajero vio una casa y quiso asegurarse de que era una pensión donde poder pasar la noche. Se acercó a 2 personas y le preguntó al primero, pero recibió una respuesta críptica, insuficiente para darle una respuesta. Le hizo la misma pregunta exactamente a la segunda persona y recibió la misma respuesta. De ello dedujo que la casa era en efecto una pensión. ¿Cuál fué la críptica respuesta?.

3.- Muchos matemáticos recreativos están familiarizados con los dos cubos cuyas caras están numeradas de modo que pueda ser posible obtener cualquier día del mes desde el 01 al 31. ¿Cómo deben estar numeradas las caras de 4 cubos para que sea posible obtener la mayor cantidad posible de años desde 1979?.

4.- La Isla de la Lógica está poblada por caballeros (que siempre dicen la verdad) y escuderos (que siempre mienten). Un día, cada habitante de la isla hace las siguientes declaraciones: " Todos mis conocidos se conocen entre sí" y " Entre mis conocidos, el número de caballeros no es mayor que el número de escuderos". Demostrar que el número de escuderos de la Isla de la Lógica no es mayor que el número de caballeros.

5.- A) Se eligen dos números enteros positivos. Su suma se revela a un lógico A, y la suma de sus cuadrados se revela a otro lógico B. A A y B se les da esta información y la información contenida en esta frase. La conversación entre A y B es como sigue. B comienza, y dice B: "No puedo decir cuáles son los números"

A: "No puedo decir cuáles son los números"

B: "No puedo decir cuáles son los números"

A: "No puedo decir cuáles son los números"

B: "No puedo decir cuáles son los números"

A: "No puedo decir cuáles son los números"

B: "Ahora puedo decir cuáles son los dos números"

¿Cuáles son los dos números?

B) Cuando B al principio dice que no puede decir cuáles son los números, A recibe una gran cantidad de información. Pero cuando a dice por primera vez que no puede decir cuáles son los números, B ya sabe que A no puede decirle cuáles son los números. ¿Qué información le proporciona a B escuchar a A?.

6.- Se te dan 216 bloques, cada uno de dimesiones 1 x 1 x 8. ¿Es posible construir un cubo de dimensiones 12 x 12 x 12 con esos bloques?.

7.- Alicia tropezó con Tweedledum y Tweedledee, que estaban haciendo muecas bajo un árbol justo al lado de su casa. “Lo siento, pero no puedo distinguiros sin vuestros cuellos bordados”, dijo Alicia. “Tendrás que usar la lógica”, dijo uno de los hermanos. En ese momento, sacó una carta de una baraja - era la reina de corazones - y se la enseñó a Alicia. “Como ves, es una carta roja. Ahora, una carta roja significa que aquel que la lleva dice la verdad, mientras que una carta negra significa que el que habla está mintiendo”. “Ahora mi hermano tamién tiene una carta roja o negra en su bolsillo, y está a punto de decir algo. Si su carta es roja, dirá algo cierto, pero si es negra dirá algo falso. Tu misión consiste en averiguar si es Tweedledee o Tweedledum”. En ese momento, el otro hermano dijo: “Soy Tweedledum y tengo una carta negra”. ¿Quién era?.
8.- Probar que cualquier entero positivo impar que no sea múltiplo de 5 tiene un múltiplo con todas sus cifras iguales a 1, por ejemplo 3 x 37 = 111 , 7 x 15873 = 111111.
9.- Sea ABC un triángulo con AB = AC, y sea M el punto medio de BC, P el pie de la perpendicular desde M hasta AC y N el punto medio de MP. Probar que BP $\perp$ AN.
10.- Sea E una elipse (no circular). Encontrar el lugar geométrico de los puntos P del plano cuyas tangentes a E tengan la misma longitud.
11.- Probar que el valor máximo del valor absoluto de:

$$2\cdot(a+ib)\cdot(x+iy)+i\cdot(a+ib)\cdot(z+iw)+i\cdot(c+id)\cdot(x+iy)$$

donde $i=\sqrt{-1}$ y a, b, c, d, x, y, z, w son números reales para los que:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=x^2+y^2+z^2+w^2=1$$

es $1+\sqrt{2}$. Estudiar el lugar geométrico de los pares de puntos P=(a, b, c, d) , Q=(x, y, z, w) de la esfera unidad en el espacio real tetradimensional para los cuales este valor absoluto toma ese valor máximo.
12.- Obtener mediante geometría plana, es decir, sin usar el cálculo, una construcción para obtener puntos en la envolvente de un conjunto de círculos cuyos diámetros son las cuerdas de un círculo fijo que pasan a través de un punto fijo dado sobre dicho círculo. Determinar de igual modo la naturaleza del lugar geométrico.
13.- En un círculo, una cuerda AB está fija en su posición y una cuerda móvil CD es constante en longitud. Encontrar el lugar geométrico de la intersección de las bisectrices de los ángulos ACD y BDC.
14.- Encontrar el lugar geométrico del punto medio del segmento determinado por dos rectas oblicuas en un plano variable que gira alrededor de un eje fijo, no coplanar con ninguna de las rectas dadas.
15.- Un mercader tenía una pesa de 40 kg que se le cayó, rompiéndose en 4 pedazos cuyos pesos respectivos eran números exactos en kilos, y por medio de los cuales podía pesar cualquier carga que fuese un número exacto de kilos comprendido entre 1 y 40, ambos inclusive. Determinar el peso de cada uno de los 4 pedazos en que se rompió la pesa inicial.
16.- Dada la longitud de la base de un triángulo variable y las posiciones de los pies de las alturas sobre los otros dos lados, encontrar:
A) El lugar geométrico de los vértices opuestos a la base.
B) El lugar geométrico del pie de la altura sobre la base.

17.- Encontrar el lugar geométrico de los puntos P tales que los pies de las perpendiculares desde P a los lados del triángulo están alineados.
18.- Los pares de tangentes a una cónica se intersecan en una recta fija. Encontrar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de contacto.
19.- Dado un polígono convexo inscripto en una circunferencia, pruebe que la suma de los radios de las circunferencias inscriptas en los triángulos de cualquier triangulación (es decir, descomposiciones del polígono en triángulos, cuyos vértices sean vértices del polígono y que lo recubran completamente sin solapamientos) es la misma.
20.- Denotemos por B(n) el n-ésimo número de Bell, es decir el número de particiones de un conjunto de n elementos en subconjuntos disjuntos y no vacíos.
(a) Pruebe que B(n) es par si y sólo si $n \equiv 2 \pmod 3$.
(b) Caracterice los B(n) que son divisibles entre 3.
21.- Sea R un anillo cualquiera, I el conjunto de los $x \in R$ para los cuales existe algún $y \neq 0$ tal que $xy = 0$ y D el conjunto de los $y \in R$ para los cuales existe algún $x \neq 0$ tal que $xy = 0$. Pruebe que si R es infinito entonces o bien I = D = (0) o bien card(I) = card(D) = card(R).
22.- Se hace rodar una parábola sobre una linea recta fija. Encontrar el lugar geométrico de: a) su vértice b) su foco.
23.- La esquina de una página de un libro se doble de tal manera que el triángulo formado tiene área constante. Probar que el lugar geométrico de la esquina es un óvalo de la curva: $r^2 = a^2 \operatorname{sen}(2\theta)$
24.- La base de un triángulo variable es fija, el vértice opuesto describe una línea recta dada. Encontrar el lugar geométrico del centro de los nueve puntos y la envolvente de la recta de Euler.
25.- Un plano gira con una de dos rectas no coplanarias como eje. encontrar el lugar geométrico, en el plano, de la intersección del plano y la otra recta.
26.- Un punto se mueve de modo que sus polares respecto a dos cónicas dadas se intersecan en ángulos rectos. Probar que el lugar geométrico de esta intersección es una curva racional cuártica que pasa por los puntos circulares, y encontrar sus puntos dobles.
27.- Si se dibuja una tangente desde un punto variable a una elipse, de longitud igual a n veces el diámetro semiconjugado en el punto, el lugar geométrico de su extremo será una elipse concéntrica con semiejes iguales a $a\sqrt{n^2+1}$, $b\sqrt{n^2+1}$.
28.- En el plano de un círculo dado, se dibuja un segundo círculo de radio fijo de modo que el eje radical de ambos círculos pase a través de una punto fijo dado. Encontrar el lugar geométrico del centro del segundo círculo.
29.- El ángulo PAM rota alrededor de A e interseca una recta, que rota alrededor de B, en P y M. Cuando M se mueve a lo largo del bisector perpendicular de AB, el lugar geométrico de P es una hipérbola equilátera con centro en el punto medio de AB. Generalizar.