Ejercicios Derivabilidad

1. Dada la curva de ecuación $y = -x^3 + 26x$, calcula las rectas tangentes a la misma que sean paralelas a la recta de ecuación $y = -x$.

2. Un matemático decide donar sus 3600 libros de matemáticas a dos bibliotecas A y B. Sus instrucciones son que los lotes se hagan de modo que el producto del número de libros destinados a la biblioteca A por el cubo del número de libros destinados a la biblioteca B sea máximo. Determina la cantidad de libros recibidos por cada biblioteca.

3. Se desea construir cajas de embalaje en forma de prisma cuadrangular recto de modo que la suma de sus dimensiones sea 72. ¿Cuáles han de ser las dimensiones para que la capacidad de las cajas sea máxima?

4. Estudia los principales aspectos de las siguientes funciones y represéntalas:

   a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 4x + 4}{x^2 + 1}$ b) $g(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ c) $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

   d) $t(x) = \dfrac{x-1}{x^2+8}$ e) $b(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$ f) $g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$

   g) $p(x) = \dfrac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2}$ h) $r(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 1}$

5. Un granjero dispone de 3000 euros para cercar una porción rectangular de terreno adyancente a un río, usando a éste como un lado del área cercada, es decir, construirá sólo 3 cercas. El coste de la cerca paralela al río es de 5 euros por metro instalado, y el de la cerca para cada uno de los dos lados restantes es de 3 euros por metro instalado. Calcula las dimensiones del área máxima que puede ser cercada.

6. De todas las parcelas de forma rectangular de área 1600 m^2 de superficie, ¿cuál sería la más barata de cercar con una valla?

7. Considera la función $f(x) = ax + \dfrac{1}{x}$. Determina los valores del parámetro a para los cuales la función es decreciente en el punto de abscisa $x = 2$.

8. a) Calcula las derivadas de las funciones:

   $$f(x) = \sqrt{4 + 2^x} + \ln \frac{1}{1+x} \qquad g(x) = \cos^2(2x+1)^3$$

   b) Aplicando la definición de derivada, calcula la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en los puntos $x = 2$ y $x = -1$.

9. Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$, se pide:

   a) Pendiente de la tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 2$.

   b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

   c) Determinar los máximos y los mínimos de la función f.

10. a) Dada la función $f(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, estudia sus cortes con los ejes, crecimiento y asíntotas.

    b) Si la función $f(t)$, para $t > 0$, expresa la relación entre los beneficios (en millones de euros) obtenidos por la venta de un producto y el tiempo t (en años) que lleva en el mercado, ¿durante cuánto tiempo no se superó el medio millón de euros de beneficio?

11. Se quiere construir una caja rectangular, sin tapa en la parte superior y de base cuadrada, con $108\ dm^2$ de material. ¿Cuáles tienen que ser las dimensiones de la caja para obtenerla de volumen máximo?

12. La producción de cierta hortaliza en un invernadero ($Q(x)$ en kilogramos) depende de la temperatura (x en °C) según la función:

$$Q(x) = (x+1)^2 \cdot (32 - x)$$

a) Calcula la temperatura óptima a mantener en el invernadero.

b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendrá a esa temperatura?

13. El consumo de gasolina de un coche (expresado en litros/km), viene dado en función de la velocidad, x (expresada en km/hora), por la fórmula:

$$g(x) = \frac{3 \cdot e^{\frac{x}{90}}}{x}$$

Determina el consumo mínimo y la velocidad a la que se consigue.

14. Considera la función polinómica de tercer grado:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

siendo a, b, c y d números reales.

a) Determina los valores del parámetro para que $f(x)$ tenga un máximo en el punto $(0, 4)$ y un mínimo en el punto $(2, 0)$.

b) Para $a = b = c = d = 1$, razona si $f(x)$ tiene puntos de inflexión y, en caso afirmativo, calcúlalos.

15. La temperatura en grados de un refresco, h horas después de ser introducido en un frigorífico viene dada por:

$$T(h) = \frac{30h^2 + 15}{8h^2 - 2h + 1}$$

a) Calcula la temperatura cuando $h = 0$, $h = 1$ y $h = 2$.

b) Tasa de variación de la temperatura entre $h = 0$ y $h = 3$.

c) Tasa de variación en el instante $h = 1$ y $h = 3$. (NO utilices la definición)

16. En determinadas condiciones, una población de mosquitos crece ajustándose a la función:

$$f(x) = 2 + 0'5e^{0'4x}$$

donde $f(x)$ es el número de mosquitos en miles y x es el tiempo en días desde el momento presente.

a) Calcula la tasa de crecimiento el terminar el segundo, tercero y sexto días.

b) ¿En qué momento la población está creciendo a un ritmo de 2000 mosquitos por día?

17. Calcula los parámetros para que sean derivables:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b & si \quad x < 1 \\ ax + 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & si \quad x \leq -1 \\ 4x + b & si \quad x > 1 \end{cases}$$

c)

$$h(x) = \begin{cases} e^x + a & si \quad x \leq 0 \\ bx^2 + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

18. C(x) es la función de coste total de fabricación de x unidades de un producto y viene dada por:

$$C(x) = 5000 + 3x - 0'05x^2 + 0'001x^3$$

(en miles de euros).

a) Halla la función de coste medio.

b) La función de coste marginal.

c) El coste marginal de la unidad 99 y 105.

19. El beneficio de una empresa por vender x unidades de su producto es:

$$B(x) = 20x + 0'003x^2$$

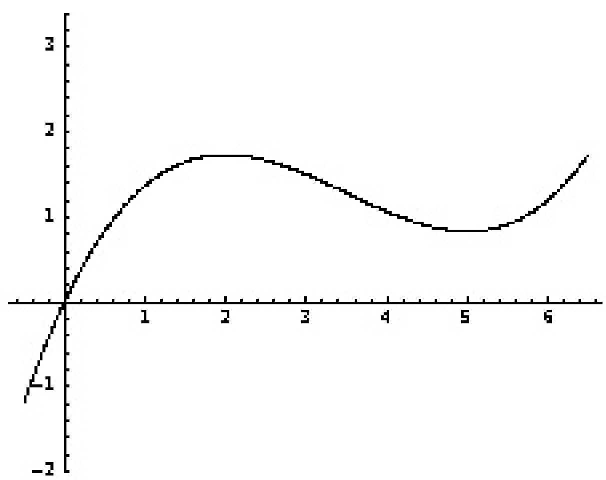
a) Calcula el beneficio suplementario por la venta de la unidad número 26.

b) La función de beneficio marginal.

c) El beneficio marginal por la venta de la unidad número 26.

d) ¿Puede aproximarse el resultado de a) por el de c)?

20. La gráfica de una función $f(x)$ es:



¿Qué signo tiene la derivada en los intervalos siguientes?

a) $x < 2$

b) $2 < x < 5$

c) $x > 5$

¿Y en los puntos $x = 2$ y $x = 5$

21. Calcula la derivada de las funciones:

1. $-\ f(x)=\frac{3}{2}x^3+\frac{2}{5}x^2-\frac{4}{7}x-5$	2. $-\ f(x)=x(x+2)$
3. $-\ f(x)=x^2(7-2x)$	4. $-\ f(x)=(2x-5)(4-3x)$
5. $-\ f(x)=(x^2-1)(2-3x^2)$	6. $-\ f(x)=(1+5x^3)(1+3x^2)$
7. $-\ f(x)=(x^2-3x+2)(-x+4x^2)$	8. $-\ f(x)=(3x^2-5x+4)^3$
9. $-\ f(x)=\frac{6}{x^3}$	10. $-\ f(x)=(3x^4-3x^2+5)^4$
11. $-\ f(x)=(1-2x+3x^2-4x^3)^5$	12. $-\ f(x)=\frac{2x-3}{3-x}$
13. $-\ f(x)=\frac{x^4-3x^2+7x}{2x+5}$	14. $-\ f(x)=\frac{2x^3-3x+2}{x^2-x+2}$
15. $-\ f(x)=\frac{(x^2-3x+4)^2}{2x^2-2x+5}$	16. $-\ f(x)=\frac{(2x+3)^3}{(3x^2-2x+6)^2}$
17. $-\ f(x)=\frac{2x-5x^2+x^3}{(2x-8)(3x-4)}$	18. $-\ f(x)=\sqrt[4]{3x}$
19. $-\ f(x)=\sqrt[5]{7x^2}$	20. $-\ f(x)=\sqrt[3]{5+4x^2}$
21. $-\ f(x)=\sqrt[5]{5x^2+2x-7}$	22. $-\ f(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}$
23. $-\ f(x)=\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x}$	24. $-\ f(x)=x^2+\sqrt{x^3-2}$
25. $-\ f(x)=\frac{2}{x-3}$	26. $-\ f(x)=\frac{-5}{\sqrt[3]{2x^4}}$
27. $-\ f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	28. $-\ f(x)=\sqrt[3]{\ln x}$
29. $-\ f(x)=\cos\sqrt[5]{-x}$	30. $-\ f(x)=5^{2x^2-4}$
31. $-\ f(x)=\log_5 \operatorname{sen}\ x$	32. $-\ f(x)=4^{\ln x}$
33. $-\ f(x)=\tan\,(2x-3)^4$	34. $-\ f(x)=\frac{1+(\operatorname{sen}\ x)^2}{\cos^2 x}$
35. $-\ f(x)=\frac{x+\operatorname{sen}\ x}{x+\cos x}$	36. $-\ f(x)=\log_4\left(\frac{x^2-2\sqrt{x}+3}{\operatorname{sen}^2(3x+5)}\right)$
37. $-\ f(x)=\ln\sqrt{\frac{e^3}{\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}}$	38. $-\ f(x)=e^{e^{e^x}}$
39. $-\ f(x)=(6x-3)^{6x-3}$	40. $-\ f(x)=(3x^2-2)^{\cos x}$
41. $-\ f(x)=(\ln 2x)^{\ln 2x}$	42. $-\ f(x)=e^{x^2}$
43. $-\ f(x)=(e^x)^2$	44. $-\ f(x)=\log_{10}\left(\tan\left(\frac{\sqrt{2x-1}}{3x+1}\right)\right)$
45. $-\ f(x)=\operatorname{arc}\cos\,(1-\ln x)$	46. $-\ f(x)=\arctan\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$