# Ejercicios Límites y Continuidad

1. Representa gráficamente funciones que satisfagan:

   a) Dominio:$\Re$, Imagen:$[-3,+\infty)$, $\lim_{x\to 3^-} f(x)=2$, $\lim_{x\to 3^+} f(x)=-2$, $f(-3)=-2$.

   b) g estrictamente decreciente en $(0,6)$, asíntota vertical en $x=6$, $\lim_{x\to 3} g(x)=-2$ , no existe $g(3)$.

   c) h acotada inferiormente por 2, asíntota horizontal en $y=2$ cuando $x$ tiende a $-\infty$, asíntota vertical en $x=2$, $\lim_{x\to\infty} h(x)=\infty$

2. Estudia la continuidad e indica el tipo de discontinuidad de las funciones:

   a) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\le 2 \\ x+1 & si \quad x>2 \end{cases}$

   b) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & si \quad x\neq 3 \\ 6 & si \quad x=3 \end{cases}$

   c) $k(x)=\begin{cases} 2x-1 & si \quad x>-1 \\ 3 & si \quad x<-1 \end{cases}$

3. Calcula las incógnitas para que sean continuas en todo $\Re$ las funciones:

   a) $f(x)=\begin{cases} kx-3 & si \quad x<4 \\ -x^2+10x-13 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

   b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2} & si \quad x\neq 2 \\ k & si \quad x=2 \end{cases}$

   c) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{8}{x} & si \quad x<-8 \\ -2m-3 & si \quad -8\le x<-4 \\ x-\dfrac{1}{n} & si \quad -4\le x<2 \\ px & si \quad 2\le x<4 \\ q^2 & si \quad x\ge -4 \end{cases}$

4. Dibuja la gráfica de una función que se ajuste a las condiciones:

   a) Continua en $\Re-\{-3,1,5,7\}$.

   b) $\lim_{x\to -3} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 1} f(x)=-2$, $f(1)=0$.

   c) Discontinuidad de salto finito en $x=5$ y de salto infinito en $x=7$.

   d) $f(-2)=0$.

5. En la oficina de correos, están expuestas las tarifas del servicio de cartas, que son:

   * Cartas de hasta 20 gr. de peso, 0'25 euros.

   * Por cada 10 gr. o fracción de exceso de peso se añaden 2 céntimos de euro más.

   a) Escribe la fórmula de la función $f(x)$ que relaciona el peso de cada carta $x$, con el precio que nos cuesta enviarla, $f(x)$, hasta 50 gr.

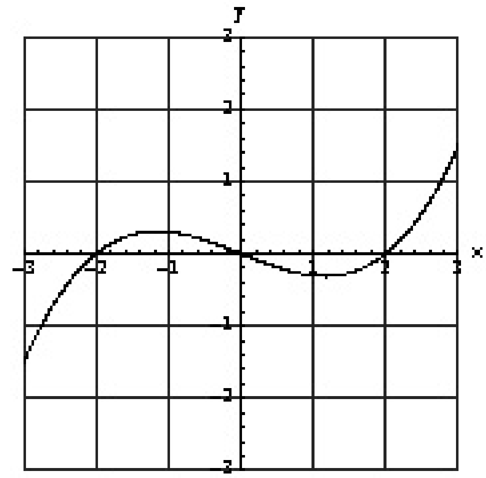
   b) Representa gráficamente $f(x)$ e indica sus puntos de discontinuidad.

6. Representar gráficamente la función:

$$h(x)=\begin{cases} x & si & -3\le x\le 0 \\ 0 & si & 0\le x\le 1 \\ -1 & si & 1<x\le 2 \\ -2 & si & 2<x\le 3 \\ 0 & si & x<-3 \quad o \quad x>3 \end{cases}$$

Estudia su continuidad. Representa la gráfica de la función $|f(x)|$.

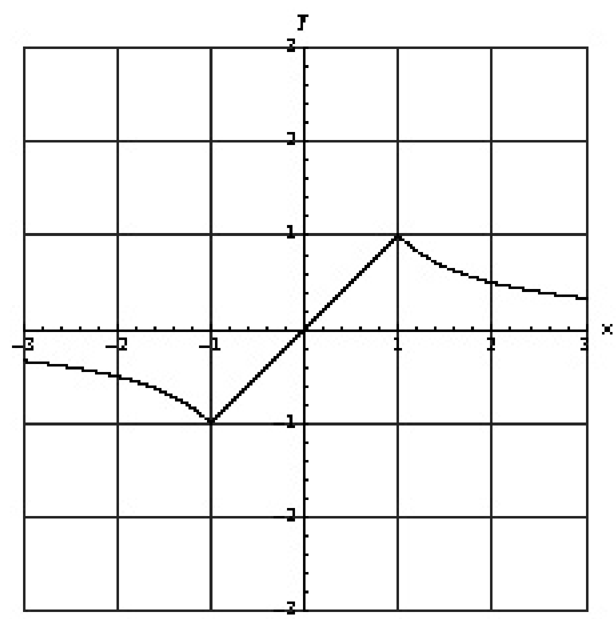
7. Para cada una de las gráficas, estudia sus principales características y calcula los límites que se indican:



$a)\ \lim_{x\to -2^+} f(x)$ $b)\ \lim_{x\to -2^-} f(x)$ $c)\ \lim_{x\to -2} f(x)$

$d)\ \lim_{x\to -\infty} f(x)$ $e)\ \lim_{x\to 2^+} f(x)$ $f)\ \lim_{x\to \infty} f(x)$

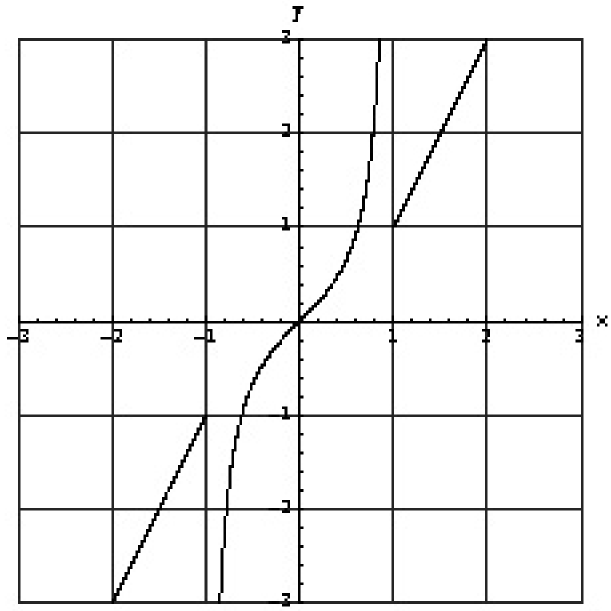
$g)\ \lim_{x\to 2^-} f(x)$ $h)\ \lim_{x\to 2} f(x)$ $i)\ \lim_{x\to 0} f(x)$



$a)\ \lim_{x\to -1^+} g(x)$ $b)\ \lim_{x\to -1^-} g(x)$ $c)\ \lim_{x\to -1} g(x)$

$d)\ \lim_{x\to -\infty} g(x)$ $e)\ \lim_{x\to 1^+} g(x)$ $f)\ \lim_{x\to \infty} g(x)$

$g)\ \lim_{x\to 1^-} g(x)$ $h)\ \lim_{x\to 1} g(x)$ $i)\ \lim_{x\to 0} g(x)$



$a)\ \lim\limits_{x\to -1^+} h(x)$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to -1^-} h(x)$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to -1} h(x)$

$d)\ \lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$ $\quad e)\ \lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to \infty} h(x)$

$g)\ \lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$ $\quad h)\ \lim\limits_{x\to 1} h(x)$ $\quad i)\ \lim\limits_{x\to 0} h(x)$

8. Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^3+3x}-x)$ $\quad d)\ \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1}-x)$

$e)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3}{-2x^2+4}$ $\quad f)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+2)^2-4}{x}$ $\quad g)\ \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x-5}$ $\quad h)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

$i)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ $\quad j)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4x+4}$ $\quad k)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ $\quad l)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

$m)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-x}{2x^2-4x}$ $\quad n)\ \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-2x-8}$

9. Una empresa ha estimado que los ingresos y los gastos anuales (en euros) que genera la fabricación y venta de x unidades de un determinado producto, vienen dados por las siguientes funciones:

   Ingresos: $I(x) = 28x^2 + 3600x$.

   Gastos: $G(x) = 44x^2 + 1200x + 7000$

   Determina de forma razonada:

   a) La función que define el beneficio anual.

   b) El número de unidades que hay que vender para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio.

10. El rendimiento físico ante determinado esfuerzo muscular (evaluado en una escala de 0 a 100) de

cierto deportista de élite durante un tiempo de 60 minutos, viene dado a través de la función:

$$R(t) = \begin{cases} -t(t-20) & si \quad 0 \leq t < 15 \\ 75 & si \quad 15 \leq t < 30 \\ 100 - \dfrac{5}{6}t & si \quad 30 \leq t < 60 \end{cases}$$

Representa la gráfica de la función e interprétala.

11. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & si \quad x \leq -1 \\ 3x^2 + 4 & si \quad -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

donde b es un número real.

a) Calcula el valor de b para que f(x) sea continua en todo su dominio.

b) Calcula los límites: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

12. El consumo de combustible (en centenares de litros) de cierta aeronave durante un total de 5 horas de vuelo, viene dado por la función:

$$C(t) = \begin{cases} 5t & si \quad 0 \leq t < 1 \\ -t^2 + 4t + 2 & si \quad 1 \leq t < 2'5 \\ 5'75 & si \quad 2'5 \leq t < 4 \\ 28'75 - 5'75t & si \quad 4 \leq t < 5 \end{cases}$$

Representa dicha función y coméntala. Estudia su continuidad.

13. Supóngase que durante los últimos 4 años las ventas, en miles de unidades, de los productos A y B, vienen dadas por:

$$A(t) = t^2 - 4t + 6$$

$$B(t) = -t^2 + 4t$$

a) ¿En qué períodos se vendió más cantidad del producto A que del B?

b) Período de tiempo durante el que las ventas de B superaron las 3000 unidades.

14. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & si \quad x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & si \quad -1 < x \leq 1 \\ \ln x & si \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Calcula a para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$.

b) Representa gráficamente $f(x)$ si $a = 3$.

c) Calcula los límites: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

15. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} & si \quad x < \dfrac{-3}{2} \\ 2x + 1 & si \quad \dfrac{-3}{2} \leq x < 0 \\ x^2 + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad y represéntala.

b) Calcula los límites: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

16. Calcula $k$ para que $g(x)$ sea continua:

$$g(x) = \begin{cases} x+k & si \quad x<5 \\ \dfrac{1}{5}x^2-2x+8 & si \quad x\geq 5 \end{cases}$$

17. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & si \quad x\leq 2 \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad en x=2.

b) Calcula sus asíntotas oblicuas.

18. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x\leq 1 \\ 3-ax^2 & si \quad x>1 \end{cases}$$

contesta a las cuestiones:

a) ¿Para qué valores de $a$ la función $f(x)$ es continua en $x=1$?

b) Si $f(x)$ es continua en un punto $k$, ¿es cierto que NO existe $\lim\limits_{x\to k} f(x)$.?

19. Calcular las asíntotas de las curvas:

$$a)\ f(x)=\frac{x^2}{x^2-1} \qquad b)\ g(x)=\frac{x^2-x-2}{2x^2-8} \qquad c)\ h(x)=\frac{x^2-7x-10}{x-1}$$

$$d)\ f(x)=\frac{3x^2-6}{2x^2-8} \qquad e)\ g(x)=\frac{x^2-2x}{2x^2+8} \qquad f)\ h(x)=\frac{x^2-x}{\sqrt{x+1}}$$

20. Los ciudadanos de cierto estado pagan en concepto de impuestos una cantidad $f(x)$ donde $x$ es el ingreso anual en miles de euros, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2'16x^2 & si \quad 0<x\leq 10 \\ 21'6x & si \quad x>10 \end{cases}$$

Dibujar la gráfica de $f(x)$.

¿Qué pocentaje de sus ingresos paga un ciudadano que gana 9000 euros anuales?

21. La población en millones de habitantes viene dada por la función:

$$P(t) = \frac{20(t-1)}{4+(t-1)^2}+40$$

donde t es el tiempo en años ($t\geq 0$).

Calcula la población actual (para t=0) y el límite de la población con el tiempo.

22. Un agricultor ha recogido 10 toneladas de fruta que, almacenadas, se deterioran a razón de 50 kg por día. Su precio actual en el mercado es de 1'2 euros por kilo, pero el precio aumenta a razón de 0'02 euros por kilo cada día.

a) ¿Qué cantidad de fruta le queda pasados t días?

b) ¿Cuál es el precio de venta por kg en ese momento?

c) ¿Cuál es la función que expresa el beneficio que obtiene al vender la fruta el día t?

d) ¿Cuántos días tienen que pasar para que ese beneficio sea máximo?

23. La cotización en bolsa de las acciones de cierta empresa siguió, durante el año 2001, aproximadamente, la evolución:

$$f(t) = 342 + 39t - 3t^2$$

donde $t$ es el tiempo en meses, $(0 \leq t \leq 12)$.

a) Representar aproximadamente $f(t)$.

b) ¿En qué mes se obtiene la máxima cotización?. Calcular el porcentaje de beneficio obtenido por un individuo que haya comprado acciones en el momento de mínima cotización y las haya vendido en el de máxima.

24. La población de un estado es:

$$P(t) = \frac{20}{4e^{\frac{-t}{100}} + 1}$$

en millones de habitantes, donde $t$ es el tiempo en años.

Calcular la población actual (instante 0) y el límite de la población con el tiempo.

25. En una localidad, el recibo trimestral de agua se desglosa de la siguiente forma:

Una cuota fija de 3'6 euros.

Los primeros 40 metros cúbicos consumidos se pagan a 0'3 euros por metro cúbico y a partir de aquí, cada metro cúbico consumido se cobra a 0'5 euros.

a) Escribir, según los trozos, la fórmula que nos permite saber cuánto hemos de pagar en función de los metros cúbicos consumidos y representar dicha gráfica.

b) Si este trimestre hemos de pagar 30 euros, ¿cuántos metros cúbicos de agua hemos consumido?

26. Las tarifas de un taxi de una ciudad indican que la bajada de bandera cuesta 2 euros, con la cual podemos recorrer hasta 500 metros.

A partir de este instante, el taxímetro salta 0'15 euros y vuelve a saltar 0'15 euros por cada 20 metros recorridos. Supongamos que el taxi no para en todo el recorrido.

a) Dibujar la función $f(x)$ que da el precio que hemos de pagar por cada viaje de $x$ metros, para $x$ entre 0 y 600 metros.

b) ¿Cuánto hemos de pagar por un viaje de 585 metros?

c) ¿Qué distancia podemos haber recorrido si hemos pagado 4 euros?

27. Calcula el valor de los siguientes límites:

*a)* $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+5}-(x+2))$

*b)* $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{6x-4}{6x-2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

*c)* $\lim_{x\to-2} \frac{2x^2-8}{x^2+x-2}$

*e)* $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2-2x+3}{2x+1}-\frac{6x-9}{4}\right)$

*f)* $\lim_{x\to-1} \frac{2x+1}{x+1}$

*g)* $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$

*i)* $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x+1}-(x+1)\right)$

*j)* $\lim_{x\to-\infty} \frac{3(2x-3)}{\sqrt{x^4-2}}$

*k)* $\lim_{x\to 3} (7-2x)^{\frac{7}{x-3}}$

*m)* $\lim_{x\to 1} \frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$

*n)* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^6+4x}{8x^8-7x^2+13}$

*o)* $\lim_{x\to 0} \frac{2x^3-6x^2+5x}{1+2x-5x^3}$

*q)* $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+x}{5x-3}\right)^{x^2}$

*r)* $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$

*s)* $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-6x+9}$

*d)* $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{8}{x}\right)^{x}$

*h)* $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^2-1}$

*l)* $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+4}-3x}{2x+1}$

*p)* $\lim_{x\to 4} (\sqrt{x^2+3x-4}-\sqrt{x^2+2x+5})$

*t)* $\lim_{x\to 0} \left(\frac{-2x+5}{3-x}\right)^{x}$