Geometría: Vectores en el espacio

1. Concepto de vector

Sabemos que el conjunto de matrices M_{mxn} con las operaciones suma y producto por números reales es un espacio vectorial sobre R. Por tanto, si consideramos el subconjunto de las matrices M_{1xn} es también un espacio vectorial.

2. Conjunto R^3

Si creamos el producto cartesiano de RxRxR, que designaremos por R^3, como:

$$R^3 = RxRxR = \{todas\ \ las\ \ ternas\ \ ordenadas\ \ formadas\ \ por\ \ números\ \ reales\} =$$

$$= \{(x, y, z)\ t.q.\ x \in R, y \in R, z \in R\} = \left\{ \ldots, (0,0,1), (3,-2,7), \left(\frac{1}{2}, 5, 8\right), \left(\sqrt{2}, 1, \sqrt{5}\right), \ldots \right\}$$

x = primera coordenada, y = segunda coordenada, z = tercera coordenada

Hay que tener en cuenta que son ternas ordenadas, la (3,4,1) es distinta de la (4,3,1).

Todo el mundo debe saber asociar una terna con un punto en el espacio real.

Es evidente que el conjunto así definido coincide con el subconjunto de matrices M_{1x3} que por tanto, con las correspondientes operaciones suma y producto por un escalar, le dotan de estructura de espacio vectorial.

De esta identidad con M_{1x3} podemos deducir que:

"Para que dos ternas de números sean iguales deben de ser iguales sus primeras, sus segundas y sus terceras coordenadas"

Ejemplo 1: Calcular "a", "b" y "c" para que se verifique la siguiente igualdad: (2a,b,6)=(-1,1,3c)

Veamos como quedan definidas las operaciones en R^3.

3. Operaciones básicas en R^3

Vamos a definir dos operaciones en R^3.

3.1 Suma en R^3 :

Definición: $\forall (x,y,z) \in R^3,\ (x',y',z') \in R^3$ (x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')

Propiedades:

1.- Es una operación interna: al sumar dos ternas reales obtenemos otra terna real.

2.- Asociativa: $\forall (x,y,z) \in R^3,\ (x',y',z') \in R^3,\ (x'',y'',z'') \in R^3$

(x,y,z)+[(x',y',z')+(x'',y'',z'')]=[(x,y,z)+(x',y',z')]+(x'',y'',z'')

3.- Conmutativa: $\forall (x,y,z) \in R^3,\ (x',y',z') \in R^3$ (x,y,z)+(x',y',z')=(x',y',z')+(x,y,z)

4.- Existencia de elemento neutro. $\forall (x,y,z) \in R^3\ \exists (a,b,c) \in R^3$ tq (a,b,c)+(x,y,z)=(x,y,z)

$$\Rightarrow \begin{cases} a+x=x \Rightarrow a=0 \\ b+y=b \Rightarrow b=0 \\ c+y=c \Rightarrow c=0 \end{cases} \Rightarrow \text{(a,b,c)=(0,0,0)}$$

5.- Existencia de elemento simétrico . El elemento simétrico para la suma se denomina elemento opuesto. $\forall (x,y,z) \in R^3\ \exists (a',b',c') \in R^3$ tq (x,y,z)+(a',b',c')=(0,0,0) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+a'=0 \Rightarrow a'=-x \\ y+b'=0 \Rightarrow b'=-y \\ z+c'=0 \Rightarrow c'=-z \end{cases} \Rightarrow \text{(a',b',c')=(-x,-y,-z)}$$

Recordar que: *todo conjunto con una operación interna que verifica estas propiedades se dice que es un grupo conmutativo.*

3.2 Producto de un número real por una terna de R^3 :

Definición: $\forall(x,y,z)\in R^3, \forall\lambda\in R$ $\lambda(x,y,z)=(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

Propiedades:

1.- Es una operación (o ley) externa, ya que a cada número real "λ" y a cada terna (x,y,z) de R^3 le asociamos una nueva terna de R^3 $(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$

2.- Distributiva de la ley externa respecto de la interna .

Sea $\lambda\in R$, $(x,y,z)\in R^3$, $(x',y',z')\in R^3 \Rightarrow \lambda[(x,y,z)+(x',y',z')]=\lambda(x,y,z)+\lambda(x',y',z')$

3.- Distributiva de la ley externa respecto a la suma de números reales:

Sea $\lambda\in R$, $\mu\in R$, $(x,y,z)\in R^3 \Rightarrow (\lambda+\mu)(x,y,z)=\lambda(x,y,z)+\mu(x,y,z)$

4.- Existencia de elemento neutro

$$\forall(x,y,z)\in R^3\ \exists\lambda\in R\ \ t.q.\ \ \lambda(x,y,z)=(x,y,z)\ \Rightarrow \begin{cases}\lambda x=x\\ \lambda y=y\Rightarrow\ \lambda=1\\ \lambda z=z\end{cases}$$

5.- Asociativa mixta

$\forall\lambda,\mu\in R$, $\forall(x,y,z)\in R^3$ $\lambda[\mu(x,y,z)]=\lambda\mu(x,y,z) \Rightarrow \lambda(\mu x,\mu y,\mu z)=(\lambda\mu x,\lambda\mu y,\lambda\mu z)=\lambda\mu(x,y,z)$

Recordar que: *Todo conjunto que tiene dos operaciones, una interna y otra externa, que además para la operación interna es un grupo conmutativo y que para la operación externa verifica las 5 propiedades anteriores, se dice que tiene una estructura de ESPACIO VECTORIAL.*

Luego $(R^3,+,.)$ es un espacio vectorial, por ello a los elementos de R^3 les llamamos VECTORES NUMÉRICOS y los denotamos por $\vec{u}$, $\vec{v}$, … p. ej. $\vec{u}(3,5,7)$

Ejemplo 2: a) -7(5,-1,3)+3(2,5,-1)=

b) [2(1,-2,-4)+5(-2,3,0)]-(1/2)(4,6,7)+6(-1,8,3)=

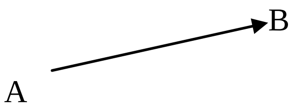
4. Vectores libres en el espacio.

4.1 Introducción. Vectores fijos.

Hay magnitudes que no quedan bien definidas únicamente con un número p.ej. velocidad, fuerza, … de ellas se necesita conocer su dirección y sentido. A estas magnitudes se les denominan vectoriales y se representan por lo que denominamos vectores fijos.

Definición: Un **vector fijo** es un segmento orientado que tiene su origen en A y extremo en B y se denota por $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Al conjunto de todos los vectores fijos del espacio se le denota por F^3.



El punto A del vector fijo $\overrightarrow{AB}$ se denomina origen y B extremo

Para determinar un vector fijo hemos de conocer su módulo, dirección, sentido y origen:

- MÓDULO de un vector $\overrightarrow{AB}$ es la longitud del segmento que une los puntos A y B. Se representa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
- DIRECCIÓN de un vector $\overrightarrow{AB}$ es la recta que pasa por A y B y todas sus paralelas. Dos vectores no nulos tienen la misma dirección si se encuentran en rectas paralelas
- SENTIDO de un vector $\overrightarrow{AB}$ es el recorrido de la recta cuando vamos de A a B. Cada dirección tiene dos sentidos.
- ORIGEN de un vector $\overrightarrow{AB}$ es el punto A

Un caso particular de vector es el vector nulo, que tiene su origen y extremo en el mismo punto: $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots$

4.1.1 Componentes cartesianas de un vector fijo

Si consideramos en el espacio el sistema cartesiano de coordenadas cualquier punto A queda determinado por sus tres coordenadas cartesianas.

Definición: Sean A(x, y,z) y B(x', y',z') dos puntos del espacio las **componentes** del vector $\overrightarrow{AB}$ son $B-A=(x'-x,\ y'-y, z'-z)$ se representa por $\overrightarrow{AB}(x'-x,\ y'-y, z'-z)$ y gráficamente son sus proyecciones sobre el eje OX, el eje OY y el eje OZ, respectivamente.

Ejemplo 3: Dados los puntos A(2,5,7) y B(3,1,9), calcular:

a) Las componentes del vector fijo $\overrightarrow{AB}$

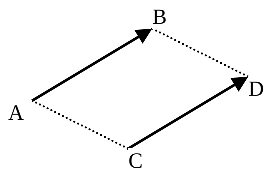
b) Un vector fijo con las mismas componentes que $\overrightarrow{AB}$ cuyo origen esté en C(-3,-1,7).

4.1.2 Equipolencia de vectores fijos

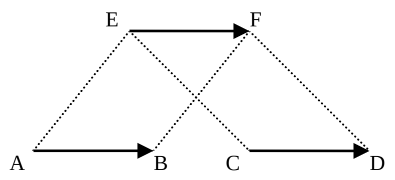
Entre los vectores fijos vamos a establecer una relación que llamaremos relación de equipolencia. Definición: Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **equipolentes** si tienen las mismas componentes i.e. $\overrightarrow{AB}(a,b,c)\ y\ \overrightarrow{CD}(d,e,f)\quad \overrightarrow{AB}\approx\overrightarrow{CD}\ \Leftrightarrow\ a=d\ y\ b=e\ y\ c=f$

Hay otras tres formas semejantes de definirlas:

1.- $\overrightarrow{AB}\approx\overrightarrow{CD}$ si cumplen una de las siguientes condiciones:

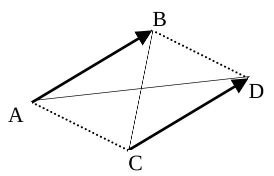


- Si son dos vectores no nulos y no contenidos en la misma recta ABDC tiene que formar un paralelogramo (**Regla del paralelogramo**)



- Si los dos vectores son no nulos y están contenidos en la misma recta, debe de existir un tercer vector $\overrightarrow{EF}$ de modo que ABFE y CDFE son paralelogramos.

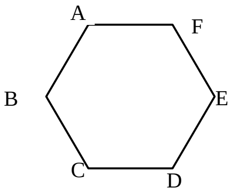
- $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son nulos

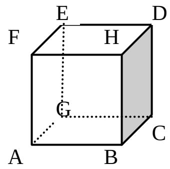


2.- $\overrightarrow{AB}\approx\overrightarrow{CD}$ si los puntos medios de $\overline{AD}\ y\ \overline{BC}$ coinciden

3.- $\overrightarrow{AB}\approx\overrightarrow{CD}$ **si tienen la misma dirección, módulo y sentido**. Ésta es intuitivamente la más fácil de manejar.

Ejemplo 4: Determinar que vectores son equipolentes en el hexágono y ortoedro adjuntos





Ejemplo 5: Las componentes del vector fijo $\overrightarrow{AB}$ son (3,2,5), calcular el punto A si B(1,-1,8)

Ejemplo 6: Dados los puntos A(1,-3,5) y B(-2,-1,6), calcular:

a) Las componentes del vector fijo $\overrightarrow{AB}$

b) Un vector fijo equipolente a $\overrightarrow{AB}$ cuyo origen sea el punto C(4,-1,0)

c) Un vector fijo equipolente a $\overrightarrow{AB}$ cuyo extremo sea el punto F(1,3,7)

Ejemplo 7: Dados los puntos A(5,2,-1) y B(1,-2,3) calcular:

a) Las componentes del vector fijo $\overrightarrow{AB}$

b) Un vector fijo equipolente a $\overrightarrow{AB}$ cuyo origen sea el punto C(-1,0,-1)

c) Idem. con extremo en el punto F(2,2,2)

4.2 Vectores libres

Definición : Llamaremos **vector libre** $\left[\overrightarrow{AB}\right]$ al conjunto constituido por un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ y todos sus equipolentes: $\left[\overrightarrow{AB}\right] = \left\{\overrightarrow{XY} \ tq \ \overrightarrow{XY} \approx \overrightarrow{AB}\right\}$

Un vector libre contiene todos los vectores de igual módulo, dirección y sentido.

Los vectores libres se denotan con letras minúsculas $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$

Al conjunto de todos los vectores libres del espacio le denotamos por V^3.

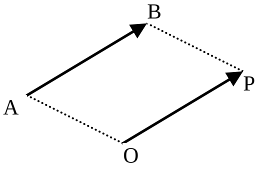
Se llama dirección, módulo y sentido de un vector libre no nulo a la dirección, módulo y sentido de cualquiera de sus representantes. Se entiende por representante cualquier vector fijo contenido en el vector libre.

Una propiedad de los vectores libres llamada **propiedad fundamental** es:

Teorema: "Cualquier vector libre $\vec{u}$ tiene un único representante con origen en un punto O arbitrario del espacio"

Demostración: Sea $\vec{u}$ un vector libre cuyo representante es $\overrightarrow{AB}$ i.e. $\vec{u} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$

1.- si O no pertenece a la recta que pasa por A y B, construimos el paralelogramo ABPO como intersección de una recta paralela a la que pasa por A y B pasando por el punto O, de la recta que pasa por A y O y por la recta por la recta paralela a la que pasa por A y O pasando por B, entonces:

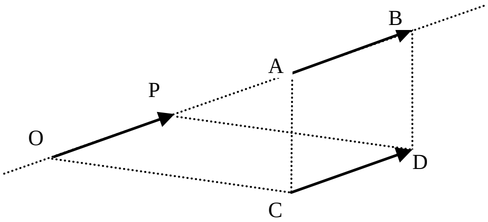


$$\overrightarrow{AB} \in \vec{u} \text{ y } \overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \in \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{OP}\right] \text{ i.e. } \overrightarrow{OP} \text{ es un representante de } \vec{u}.$$

La unicidad viene dada de por la unicidad de la existencia del punto P, como intersección de dos rectas no paralelas.

2.- Si el punto O pertenece a la recta que pasa por A y B. Elegimos un punto arbitrario C que no está en la recta que pasa por A y B. Como C no está en la mencionada recta, por el apartado 1, existe un único representante que pase por C.

Ahora nos quedamos con este representante y nos fijamos que el punto O no está en la recta que contiene a este representante, por el apartado 1, existe un único representante que pasa por O.



$$\left.\begin{matrix} \vec{u} = \left[\overrightarrow{AB}\right] \\ \overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{CD}\right]$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{u} = \left[\overrightarrow{CD}\right] \\ \overrightarrow{OP} \approx \overrightarrow{CD} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{OP}\right]$$

La importancia de este teorema lo veremos cuando realicemos las operaciones con vectores libres.

Ejemplo 8: Dados los puntos A(3,-4,5) y B(2,0,-4), calcular:

a) las componentes del vector libre $\vec{u}$ uno de cuyos representantes es $\overrightarrow{AB}$

b) el origen y el extremo de otro vector fijo que también sea representante de $\vec{u}$

4.2.1 Vector posición de un punto

Definición: Dado un punto cualquiera $P \in R^3$, llamamos **vector de posición** del punto P, al vector que tiene por origen el origen de coordenadas y por extremo el punto P, es decir al vector $\overrightarrow{OP}$, que lo denotaremos por $\vec{p}$.

Se verifica que las componentes del vector $\vec{p}$ coinciden con las coordenadas del punto P.

Sea P(x,y,z) $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (x-0, y-0, z-0) = (x, y, z)$

Luego aplicando la propiedad fundamental de los vectores libres, cualquier vector libre $\left[\overrightarrow{AB}\right]$, tiene un representante en el origen de coordenadas $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$, y las componentes de este vector coinciden con las coordenadas cartesianas de su extremo Q.

Así, a cada vector libre le puedo asociar un punto y viceversa.

Ahora, teniendo en cuenta que tener un vector libre es equivalente a tener un punto y esto es exactamente igual a tener un vector numérico, podemos deducir que los vectores libres se pueden manejar igual que los vectores numéricos y por tanto tienen sus mismas propiedades. Esto es interesante a la hora de plantear y resolver ejercicios.

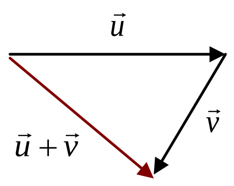
4.2.2 Operaciones con vectores libres

<u>Definición</u>: Dos vectores libres son iguales cuando sus representantes son equipolentes i.e cuando tienen las mismas componentes $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$ siendo $\vec{u} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ y $\vec{v} = \left[\overrightarrow{CD}\right]$

Es una definición similar a la que hemos dado para igualdad de vectores numéricos.

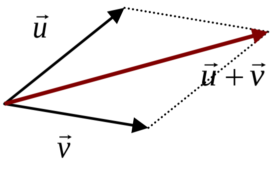
4.2.2.1 Adición

<u>Definición</u>: Para sumar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se representa uno de ellos $\vec{u}$, y con origen en el extremo de $\vec{u}$, se representa el otro vector $\vec{v}$. El vector suma de ambos, es el que tiene el origen de $\vec{u}$ y el extremo de $\vec{v}$.



También se pude sumar aplicando la ley del paralelogramo:

"Se representan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con el mismo origen. El vector suma es la diagonal del paralelogramo formado con $\vec{u}$ y $\vec{v}$."



<u>Propiedades</u>:

1.- Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

2.- Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

3.- Existencia de elemento neutro: $\vec{o}+\vec{u} = \vec{u}$ con $\vec{o} = \left[\overrightarrow{AA}\right]$

4.- Existencia de elemento opuesto: $\vec{u}$ +(- $\vec{u}$)= $\vec{o}$ con $\overrightarrow{-u} = [\overrightarrow{BA}]$

El opuesto de un vector libre es otro vector libre de igual módulo, dirección y sentido contrario, que nos permite definir la diferencia como $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (\overrightarrow{-v})$

El conjunto de todos los vectores libres del espacio lo denotaremos por V^3.

Así *(V^3,+) es un grupo conmutativo*.

Ejemplo 9: Dados los vectores libres $\vec{u}$ (2,-1,9) y $\vec{v}$ (-3,4,3) calcular $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$

Ejemplo 10: Si $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector libre $\vec{u}$ y $\overrightarrow{CD}$ de $\vec{v}$ siendo A(0,1,8), B(3,-2,-1), C(1,0,1) y D(4,7,-1), calcular:

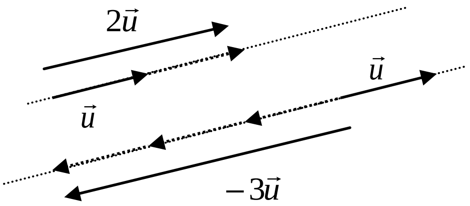
a) $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$ b) Un representante de $\vec{s}$ con origen en el punto E(2,1,1)

4.2.2.2 Producto de un número real por un vector

Definición: Al multiplicar un vector $\vec{u}$ por un número real k, obtenemos un nuevo vector libre $\overrightarrow{ku}$ que tiene:

- igual módulo al del vector $\vec{u}$ por el valor absoluto del número k $|\overrightarrow{ku}| = |k||\vec{u}|$
- igual dirección que la del vector $\vec{u}$
- el mismo sentido que $\vec{u}$ si k es positivo ó contrario si k es negativo.
- si k=0 le hacemos corresponder el vector nulo

Ejemplo 11: $2\vec{u}$ y $-3\vec{u}$



Propiedades:

1.- Distributiva del producto respecto de la suma $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

2.- Distributiva del producto respecto a la suma de números reales $\vec{u}(k+t) = k\vec{u} + t\vec{u}$

3.- Asociativa mixta $k(t\vec{u}) = (kt)\vec{u}$

4.- Elemento neutro para el producto $1.\vec{u} = \vec{u}$

Luego el conjunto de los vectores libres con la suma y el producto por un escalar es un espacio vectorial que se denota por (V^3,+,.).

4.2.3 Combinación lineal de vectores en V^3

Definición: Dado un vector en el espacio $\vec{v} \in V^3$, se dice que es **combinación lineal** de un conjunto de vectores del espacio $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, si es posible encontrar unos números reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, no todos nulos, tales que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + ... + \lambda_n \vec{u}_n$

Se dice que un conjunto de vectores son linealmente dependientes o que forman un sistema ligado, si uno cualquiera de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás. En caso contrario diremos que son linealmente independientes o forman un sistema libre.

Esta definición de dependencia lineal es poco operativa la que se utiliza:

Definición: Se dice que un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n \in V^3$ son **linealmente independientes** si la única combinación lineal de ellos es la trivial es decir: si $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + ... + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$ entonces $\lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, ..., n$

Gráficamente tres vectores (no nulos) son L.I. si tienen distinta dirección i.e .no son coplanarios

Nosotros utilizaremos otra herramienta que ya conocemos y que nos da información sobre la independencia lineal de vectores como es el rango de las matrices que construimos con los vectores.

Ejemplo 12: Comprobar si los vectores $\vec{i}\,(1,0,0);\ \vec{j}\,(0,1,0)\ y\ \vec{k}(0,0,1)$ son L.I.

Aplicando directamente la definición operativa:

$$\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,01) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Esto también se puede comprobar calculando el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hacemos su determinante |M|=1≠0 luego RgM=3 i.e los vectores filas (columnas) son L.I.

Ejemplo 13: Indicar cuantos vectores L.I. del siguiente conjunto de vectores:

$\{(1,2,0), (-1,0,2), (2,6,2), (4,12,4)\}$.

Se trata de hallar el rango de $M=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&2\\2&6&2\\4&12&4\end{pmatrix}$ fijarse que el rango máximo de M es 3 al ser vectores de V^3 por tanto el número máximo de vectores de V^3 L.I. es 3.

Orlando el menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}\neq 0 \ \textit{orlando se tiene} \begin{vmatrix}1&2&0\\-1&0&2\\2&6&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0\\-1&0&2\\4&12&4\end{vmatrix}=0\Rightarrow RgM=2\Rightarrow \text{ dos vectores L.I.}$$

<u>Definición</u>: Un conjunto de vectores constituye un **sistema generador** si cualquier vector del espacio se puede expresar como C.L. de ellos i.e.

$$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\in V^3 \ \textit{sistema generador} \Leftrightarrow \forall\vec{w}\in V^3 \ \exists\lambda_1,\dots,\lambda_n\in R \ t.q. \ \vec{w}=\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\dots+\lambda_n\vec{v}_n$$

<u>Definición</u>: Una **base** de un espacio vectorial es un sistema generador formado por vectores L.I.

*Una **base** del plano V^3 está formada por tres vectores de V^3 L.I.*

Teniendo en cuenta lo que hemos visto antes, podemos decir que gráficamente tres vectores no nulos y no coplanarios forman una base de V^3.

En el espacio, al igual que ocurría en el plano, existen infinitas bases, es decir, infinitos conjuntos de tres vectores L.I. en función de los cuales pueden expresarse todos los vectores del espacio.

De todas las bases que podemos elegir de V^3 la más sencilla es la formada por los vectores $\beta=\{\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\}=\{(1,0,0);(0,1,0),(0,0,1)\}$ por ello se la denomina BASE CANÓNICA de V^3. Estos tres vectores tienen la propiedad de ser perpendiculares y tener módulo 1.

Si $\beta=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es una base de V^3 llamamos componentes del vector $\vec{w}$ a los $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tal que $\vec{w}=\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+\lambda_3\vec{u}_3$ i.e. $\vec{w}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ en β.

<u>Ejemplo 14</u>: Demostrar si los vectores $\{\vec{u}_1(0,0,-1);\vec{u}_2(-2,-1,0),\vec{u}_3(-3,0,1)\}$ forman una base de V^3. Hallar las componentes del vector (-11,-1,1) en dicha base. Sol: (2,1,3)

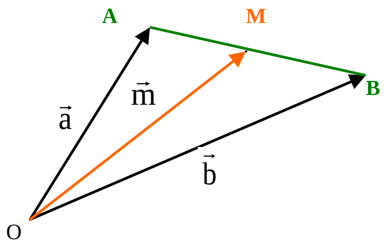
<u>Ejemplo 15</u>: Hallar la condición que deben verificar los valores a y b para que el vector (a,-2,b) sea linealmente dependiente con los vectores. (1,2,4) y (-1,0,3). Sol: 3a+b+7=0

5. Aplicaciones geométricas de los vectores

5.1 Coordenadas del punto medio de un segmento

Sea el segmento $\overline{AB}$ con $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ y $M(x_m, y_m, z_m)$ el punto medio.

$$\vec{m} = \vec{a} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$



Pasando esta ecuación vectorial a componentes tenemos:

$$(x_m, y_m, z_m) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_m = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_m = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ z_m = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \end{array} \text{ Ecuación analítica}$$

Segunda demostración:

$\overrightarrow{AM} \approx \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow (x_m - x_1, y_m - y_1, z_m - z_1) = (x_2 - x_m, y_2 - y_m, z_2 - z_m)$ igualando las componentes

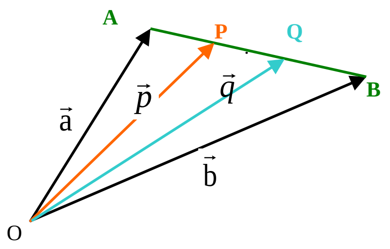
obtenemos

$$x_m - x_1 = x_2 - x_m \Rightarrow 2x_m = x_1 + x_2 \Rightarrow x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$y_m - y_1 = y_2 - y_m \Rightarrow 2y_m = y_1 + y_2 \Rightarrow y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
$$z_m - z_1 = z_2 - z_m \Rightarrow 2z_m = z_1 + z_2 \Rightarrow z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Como generalización podemos hallar los puntos que dividen un segmento en un determinado número de partes. Dividir el segmento $\overline{AB}$ en n+1 partes iguales. Tenemos que hallar los n números (k_1, k_2, , k_n) que lo dividen en n+1 partes. Para ellos partiremos de que:

$$\overrightarrow{Ak_1} = \frac{\overrightarrow{AB}}{n+1},\quad \overrightarrow{Ak_2} = 2\frac{\overrightarrow{AB}}{n+1},\quad \overrightarrow{Ak_3} = 3\frac{\overrightarrow{AB}}{n+1},\qquad ,\ \overrightarrow{Ak_n} = n\frac{\overrightarrow{AB}}{n+1}$$

Ejemplo 16: Hallar los puntos P y Q que dividen ala segmento $\overline{AB}$ en tres partes iguales con A(3,2,7) y B(5,10,-2).



$$\vec{p} = \vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{11}{3}, \frac{14}{3}, 4\right)$$

$$\vec{q} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{13}{3}, \frac{22}{3}, 1\right)$$

5.2 Puntos alineados

Tres o más puntos A_1, A_2, …,A_n están alineados (i.e. son colineales) si están en la misma recta.

Vectorialmente esto quiere decir que $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, … , $\overrightarrow{A_1A_n}$ tienen la misma dirección, por lo que se deben de ser proporcionales, es decir existen n-2 escalares k_1, … ,k_{n-2} tal que

$\overrightarrow{A_1A_2} = k_1 \overrightarrow{A_1A_3} = \ldots = k_{n-2} \overrightarrow{A_1A_n}$. Utilizando rangos $Rg(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_n}) = 1$

Ejemplo 17: Comprobar si están alineados los siguientes puntos:

a) A(2,3,4), B(1,3,-2), C(3,3,10) Si

b) P(2,4,4), Q(-3,2,1), R(7,4,9) No

Ejemplo 18: Hallar "p" sabiendo que los puntos A(2,5,-1), B(4,3,3) y C(0,p,-5) están alineados.

Sol p=3 $Rg\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = Rg\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & p-5 & -4 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & p-5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2p - 14 = 0 \Leftrightarrow p = 3$.

5.3 Puntos coplanarios

Cuatro o más puntos A_1, A_2, …,A_n son coplanarios si están en el mismo plano.

Esto quiere decir que entre los vectores $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, … , $\overrightarrow{A_1A_n}$ hay a lo sumo dos linealmente independientes y por tanto $Rg(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_n}) \leq 2$

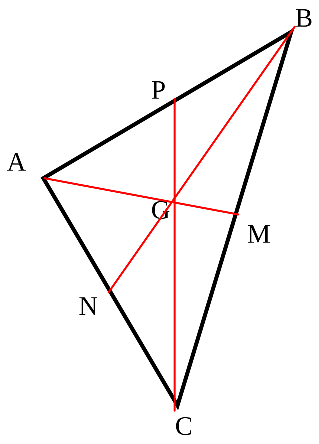
Ejemplo 19: Calcular el valor de "a" para que los cuatro puntos estén en el mismo plano (a,0,1), (0,1,2), (1,2,3), (7,2,1).

Sol: $\begin{vmatrix} -a & 1 & 1 \\ 1-a & 2 & 2 \\ 7-a & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

5.4 Baricentro de un triángulo

Se trata de hallar las coordenadas del baricentro de un triángulo conociendo las de sus vértices.

Recordemos que el baricentro de un triángulo es el punto donde se cruzan las medianas. Y tiene la propiedad de que divide a cualquiera de las medianas en dos segmentos tales que la longitud de uno de ellos es el doble del otro.



$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GN}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GP}} = 2$$

podemos escribir $\overrightarrow{AG} = 2 \cdot \overrightarrow{GM}$

como M es el punto medio de $\overrightarrow{BC}$

$A(x_a, y_a, z_a)$, $B(x_b, y_b, z_b)$, $C(x_c, y_c, z_c)$, $G(x_g, y_g, z_g)$ $\Rightarrow \Rightarrow M\left(\frac{x_b + x_c}{2}, \frac{y_b + y_c}{2}, \frac{z_b + z_c}{2}\right)$ y por tanto

$$\overrightarrow{AG} = 2 \cdot \overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \left(x_g - x_a, y_g - y_a, z_g - z_a\right) = 2 \cdot \left(\frac{x_b + x_c}{2} - x_g, \frac{y_b + y_a}{2} - y_g, \frac{z_b + z_a}{2} - z_g\right) \Leftrightarrow$$

$$x_g - x_a = x_b + x_c - 2x_g \Leftrightarrow x_g = \frac{x_a + x_b + x_c}{3}$$

$$\Leftrightarrow y_g - y_a = y_b + y_c - 2y_g \Leftrightarrow y_g = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}$$

$$z_g - z_a = z_b + z_c - 2z_g \Leftrightarrow z_g = \frac{z_a + z_b + z_c}{3}$$

Ejercicios.

6. Producto escalar

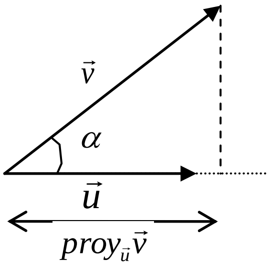
Definición: El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un **número real** que se obtiene del modo siguiente:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v}=\begin{cases}|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ no nulos}\\ 0 & \text{si } \vec{u} \text{ ó } \vec{v} \text{ nulo}\end{cases}$$

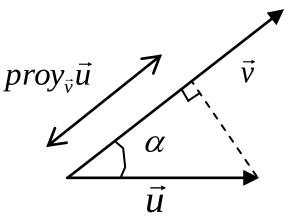
De esta definición se desprende que si los vectores son perpendiculares (ortogonales) el producto escalar es 0, es decir $\vec{u}\perp\vec{v}\iff\vec{u}.\vec{v}=0$

Ejemplo 19: Calcular $(2\vec{u}-3\vec{v})(3\vec{u}+\vec{v})$ sabiendo que $\vec{u}\,.\,\vec{v}=2{,}5$, $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$. Sol. -47/2

6.1 Interpretación geométrica



$proy_{\vec{u}}\vec{v}=|\vec{v}|\cos\alpha$



$proy_{\vec{v}}\vec{u}=|\vec{u}|\cos\alpha$

$\alpha=(\vec{u},\vec{v})$=menor de los ángulos formados por ambos vectores

$proy_{\vec{u}}\vec{v}$ =proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$.

$proy_{\vec{v}}\vec{u}$ =proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$.

Tenemos que $\vec{u}\,.\,\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha=|\vec{u}|\,proy_{\vec{u}}\vec{v}=|\vec{v}|\;proy_{\vec{v}}\vec{u}$

"*El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre el primero*"

Ejemplo 20: Si $|\vec{u}|=6$ y $\vec{u}\,.\,\vec{v}=-8$; hallar razonadamente 18 $proy_{\vec{u}}\vec{v}$

6.2 Propiedades del producto escalar

1.- $\vec{u}\,.\,\vec{u}\geq 0$ Demostración: $\vec{u}.\vec{u}=|\vec{u}||\vec{u}|\cos 0=|\vec{u}|^2\geq 0$

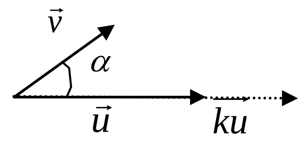
Corolario: Definición de módulo de un vector $|\vec{u}|=+\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$

2.- Conmutativa: $\vec{u}\,.\,\vec{v}=\vec{v}\,.\,\vec{u}$ Demostración: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})=|\vec{v}||\vec{u}|\cos(\vec{v},\vec{u})=\vec{v}.\vec{u}$

3.- Homogénea o asociativa del producto de un número real por el producto escalar de dos vectores: $k\in R,\ \vec{u},\vec{v}\in V^3$ $\quad k(\vec{u}.\vec{v})=(k\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(k\vec{v})$

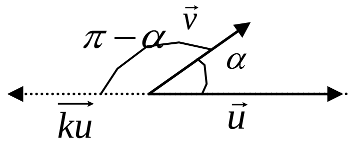
Demostración:

Si k=0 trivial



Si k>0 $(k\vec{u}).\vec{v}=|k\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(k\vec{u},\vec{v})=|k||\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})=$

$=k|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$



Si k<0 $(k\vec{u}).\vec{v}=|k\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(k\vec{u},\vec{v})=|k||\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha=$

$=-k|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\pi-\alpha)=-k|\vec{u}||\vec{v}|(-\cos(\pi-\alpha))=$

$=k|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha=k(\vec{u}.\vec{v})$

4.- Distributiva del producto escalar con respecto a la suma : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

Ejemplo 21: Comprobar estas propiedades con los vectores $\vec{u}(2,6,-1), \vec{v}(3,1,1)\ y\ \vec{w}(8,1,-5)$ y k=-2

6.3 Expresión analítica del producto escalar en la base canónica

Sea $\beta=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ una base cualquiera del espacio y sean $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ dos vectores que podrán

expresarse como C.L. de la base β: $\begin{matrix}\vec{u}=u_1\vec{e}_1+u_2\vec{e}_2+u_3\vec{e}_3\\ \vec{v}=v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3\end{matrix}$ el producto escalar será

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v}=(u_1\vec{e}_1+u_2\vec{e}_2+u_3\vec{e}_3).(v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3)&=u_1.v_1.(\vec{e}_1.\vec{e}_1)+u_1.v_2.(\vec{e}_1.\vec{e}_2)+u_1.v_3.(\vec{e}_1.\vec{e}_3)+\\&+u_2.v_1.(\vec{e}_2.\vec{e}_1)+u_2.v_2.(\vec{e}_2.\vec{e}_2)+u_2.v_3.(\vec{e}_2.\vec{e}_3)+\\&+u_3.v_1.(\vec{e}_3.\vec{e}_1)+u_3.v_2.(\vec{e}_3.\vec{e}_2)+u_3.v_3.(\vec{e}_3.\vec{e}_3)\end{aligned}$$

matricialmente lo podemos expresar: $\vec{u}.\vec{v}=(u_1\ u_2\ u_3)\begin{pmatrix}\vec{e}_1.\vec{e}_1 & \vec{e}_1.\vec{e}_2 & \vec{e}_1.\vec{e}_3\\ \vec{e}_2.\vec{e}_1 & \vec{e}_2.\vec{e}_2 & \vec{e}_2.\vec{e}_3\\ \vec{e}_3.\vec{e}_1 & \vec{e}_3.\vec{e}_2 & \vec{e}_3.\vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$ (expresión 1)

Observación: la segunda matriz es simétrica, pues el p.e. es conmutativo.

Esta expresión se puede simplificar mucho si elegimos adecuadamente la base.

Definición: Un vector $\vec{u}$ se dice que es **unitario** (normado) si $|\vec{u}|=1$.

Normalizar un vector es obtener otro vector a partir de él, que tenga la misma dirección y sentido y de módulo 1, para ello lo único que hay que hacer es dividirlo por su módulo

$$\forall\vec{u}\in V^3\quad \vec{v}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Demostración:

$\forall \vec{u} \in V^3 \quad \vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \quad \Rightarrow \ |\vec{v}| = \left|\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right| = \dfrac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|} = 1$, luego ya tenemos la unicidad del módulo. La misma

dirección y sentido viene dado de que $|\vec{u}|$ es un número positivo.

Definición: Tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ se llaman **ortogonales** si lo son entre sí es decir $\vec{u} \perp \vec{v}$,

$\vec{u} \perp \vec{w}$, $\vec{v} \perp \vec{w}$ y si además son de módulo 1 ($|\vec{u}|=|\vec{v}|=|\vec{w}|=1$) son **ortonormales**.

Definición: Una base cuyos vectores son perpendiculares y de módulo 1 recibe el nombre de **base ortonormal**.

Expresión analítica del producto escalar en la base canónica

Un ejemplo de base ortonormal es la base canónica $\beta = \{\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\} = \{(1,0,0);(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Utilizando esta base la 2ª matriz de la expresión 1 se convierte en la matriz identidad, pues

$$\begin{array}{l} \vec{i} \perp \vec{j} \Leftrightarrow \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0 \\ \vec{i} \perp \vec{k} \Leftrightarrow \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0 \quad \text{y} \ |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \Leftrightarrow \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1 . \\ \vec{j} \perp \vec{k} \Leftrightarrow \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0 \end{array}$$

El producto escalar en una base ortonormal resulta**:**

$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}$ **expresión analítica del producto escalar**

Mientras no se indique lo contrario emplearemos bases ortonormales

Como consecuencia de la expresión analítica del p.e. tenemos que $\boxed{|\vec{u}| = +\sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = +\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$

6.4 Ángulo formado por dos vectores

De la propia definición $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

Consecuencias:

- Dos vectores paralelos de igual sentido $\Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|$
- Dos vectores paralelos de distinto sentido $\Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = -|\vec{u}|.|\vec{v}|$

Si tomamos una base ortonormal $\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}}$

6.5 Cosenos directores

Son los cosenos de los ángulos que forman el vector $\vec{u}$ con cada uno de los vectores de la base canónica

$$\cos\alpha = \cos(\vec{u}, \vec{i}) = \frac{\vec{u}.\vec{i}}{|\vec{u}||\vec{i}|} = \frac{(u_1\ u_2\ u_3)\cdot(1\ 0\ 0)}{|\vec{u}|.1} = \frac{u_1}{|\vec{u}|} \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = |\vec{u}|\cos\alpha$$

del mismo modo

$$\cos\beta = \cos(\vec{u}, \vec{j}) = \frac{\vec{u}.\vec{j}}{|\vec{u}||\vec{j}|} = \frac{(u_1\ u_2\ u_3)\cdot(0\ 1\ 0)}{|\vec{u}|.1} = \frac{u_2}{|\vec{u}|} \qquad \Rightarrow \qquad u_2 = |\vec{u}|\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \cos(\vec{u}, \vec{k}) = \frac{\vec{u}.\vec{k}}{|\vec{u}||\vec{k}|} = \frac{(u_1\ u_2\ u_3)\cdot(0\ 0\ 1)}{|\vec{u}|.1} = \frac{u_3}{|\vec{u}|} \qquad \Rightarrow \qquad u_3 = |\vec{u}|\cos\gamma$$

Con esto podemos expresar

$$\vec{u} = |\vec{u}|\cos\alpha\,\vec{i} + |\vec{u}|\cos\beta\,\vec{j} + |\vec{u}|\cos\gamma\,\vec{k} = |\vec{u}|\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}\right)$$

Y además se verifica que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ pues

$$\cos\alpha^2 + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{|\vec{u}|^2} = \frac{|\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} = 1$$

Ejemplo 22: Dados los vectores $\vec{u}(2,-1,0)\ y\ \vec{v}(-1,1,2)$calcular:

a) El módulo de $\vec{u}\ y\ \vec{v}$

b) El producto escalar $\vec{u}.\vec{v}$

c) el ángulo que forman

d) el valor de "m" para que el vector $\vec{w}(m,2,3)$ sea ortogonal con $\vec{v}$.

e) Hallar la proyección de $\vec{u}\ sobre\ \vec{v}$ y la de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

Ejemplo 23: Comprobar que los vectores $\vec{u}(1,-3,1)\ y\ \vec{v}(0,1,3)$ son ortogonales y calcular sus módulos

Ejemplo 24: Dados los vectores $\vec{u}(a,2,-2)\ y\ \vec{v}(4,b,3)$ hallar "a" y "b" para que sea perpendiculares y además $|\vec{v}| = 13$.

Ejercicios

7. Producto vectorial.

Definición 19: El **producto vectorial** de dos vectores $\vec{u},\vec{v}\in V^3$, se denota por $\vec{u}\wedge\vec{v}$ ó $\vec{u}\times\vec{v}$, es otro vector que tiene como:

1. módulo el producto de los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por el seno del ángulo que forman i.e.

   $|\vec{u}\wedge\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|sen(\vec{u},\vec{v})$

2. dirección una perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
3. sentido, el que viene determinado por el avance del sacacorchos que gira de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ por el camino más corto.

De esta definición puede deducirse que:

a) si $\vec{u}=\vec{0}$ $ó$ $\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

b) si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección (i.e. son L.D.) entonces $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

c) si queremos hallar un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ basta con hallar su producto vectorial.

Observación: los vectores cuyo producto escalar es cero son perpendiculares

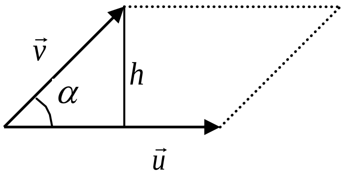
Los vectores cuyo producto vectorial es cero son paralelos

7.1 Interpretación geométrica

El módulo del producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representa geométricamente el área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. .

$$\boxed{|\vec{u}\wedge\vec{v}| = \text{área del paralelogramo}}$$

Demostración:



$$|\vec{u}\wedge\vec{v}|=|\vec{u}|\overbrace{|\vec{v}|sen\alpha}^{h}=|\vec{u}|.h=base\,x\,altura=área\ del\ paralelogramo$$

Obsevación: a) $sen(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ $\quad cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$ $\quad tg(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}{\vec{u}.\vec{v}}$

b) El área de un triángulo de vértices A, B y C es

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$$

7.2 Propiedades

1. Anticonmutativa: $\forall \vec{u},\vec{v} \in V^3 \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
2. Asociativa de la multiplicación de un escalar (homogénea).

   $$\forall \vec{u},\vec{v} \in V^3, \forall k \in R \qquad k(\vec{u} \wedge \vec{v}) = k\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge k\vec{v}$$

3. Distributiva respecto a la adición: $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V^3 \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

Ejemplo 25: Comprobar estas propiedades con los vectores: $\vec{u}(1,-3,2), \vec{v}(3,4,-1), \vec{w}(1,5,0)\ y\ k = -2$

7.3 Expresión analítica

Tomamos el sistema de referencia $\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ entonces:

$$\boxed{\forall \vec{u},\vec{v} \in V^3 \qquad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \ con\ \vec{u}(u_1,u_2,u_3);\ \vec{v}(v_1,v_2,v_3)}$$

expresión analítica

Demostración:

$$\forall \vec{u},\vec{v} \in V^3 \qquad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = desarrollando\ por\ la\ 1^{a}\ fila\ \ldots\text{.(Oxford pag268)}$$

Ejemplo 26: Hallar $\vec{u} \wedge \vec{v}$. con los vectores $\vec{u}(-2,1,0), \vec{v}(2,2,-1)$. Sol. (-1,-2,-6)

Ejemplo 27: Dar un vector ortonormal a $\vec{u}(1,-1,0), \vec{v}(2,3,-1)$ y calcular el área del paralelogramo que determinan. Sol $\frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{5\sqrt{3}}{9}\right)$ y $\text{Área} = 3\sqrt{3}\ u^2$

Ejemplo 28: Hallar el área del triángulo determinado por los puntos: A(1,-2,3), B(3,-1,4) y C(6,-2,1)

Sol $\frac{\sqrt{110}}{2} u^2$

8. Producto mixto

El producto mixto es una combinación del p.v. y el p.e..

Definición: Dados tres vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V^3$ se define su producto mixto como $\vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w})$, en ocasiones se denota $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

8.1 Expresión analítica

En un sistema de referencia $\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ podemos poner:

$$\boxed{\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V^3 \qquad \vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad con\ \ \vec{u}(u_1,u_2,u_3);\ \vec{v}(v_1,v_2,v_3);\vec{w}(w_1,w_2,w_3)}$$

Expresión analítica

Comprobación:

$$\vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w})=(u_1,u_2,u_3)\cdot\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix},-\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\right)=$$

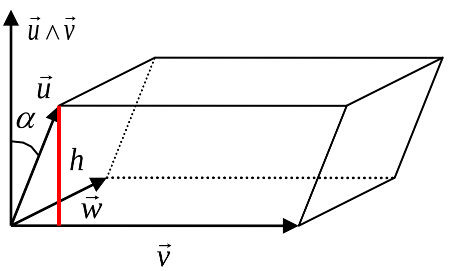
$$=u_1\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}-u_2\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}+u_3\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Interpretación geométrica

Sean $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V^3$ el módulo del producto mixto $\vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w})$ es el volumen del paralelepípedo construido sobre ellos.

$$\boxed{|\vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w})|=volumen\ del\ \ paralelepipedo}$$

Demostración:



Sea α el ángulo formado por $\vec{u}\ \ y\ \vec{v}\wedge\vec{w}$ i.e $\alpha=(\vec{u},\vec{v}\wedge\vec{w})$

$$|\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})|=|\vec{v}\wedge\vec{w}|\overbrace{|\vec{u}|\cos\alpha}^{h}=\text{área de la base por la altura}=$$

= área del paralelogramo de la base por la altura = volumen del paralelepípedo

Observación: teniendo en cuenta que $V_{\text{tetraedro}} = 1/3\ V_{\text{prisma triangular}}$

$V_{\text{prisma triangular}} = 1/2\ V_{\text{paralelepipedo}}$

Podemos deducir que el volumen de un tetraedro es

$$V_{\text{tetraedro}}=1/3\ V_{\text{prisma triangular}}=1/6\ V_{\text{paralelepipedo}}=\frac{1}{6}\left|\vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w})\right|$$

Ejemplo 29: Dados los vectores $\vec{u}(1,-1,2),\vec{v}(-1,-1,3)\ y\ \vec{w}(5,2,1)$ calcular su producto mixto. Sol -17

Ejemplo 30: Determinar el volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores

$\vec{u}(1,0,2),\vec{v}(2,2,2)\ y\ w(3,-1,2)$. Sol $10u^3$.

Ejemplo 31: Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son: A(3,2,5), B(5,-1,4), C(3,-1,-1) y D(4,-3,0). Sol 5/2

Ejercicios