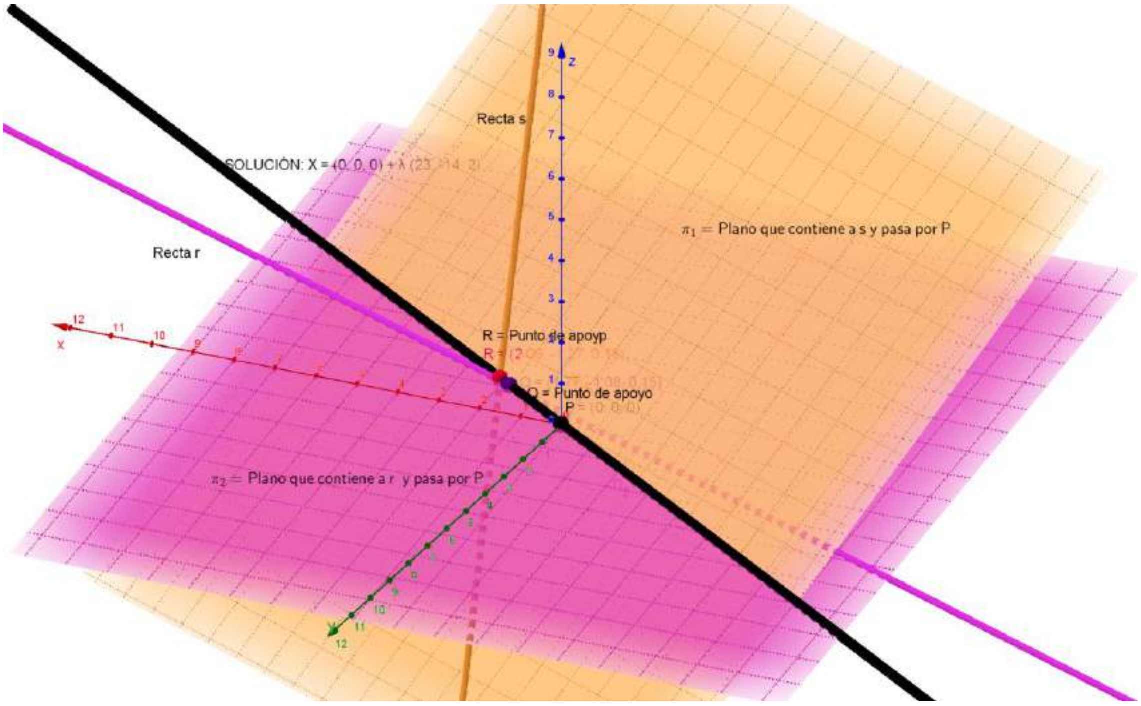
Planos y rectas III

8.- “Recta que pasa por un punto y se apoya en otras dos que se cruzan”.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 5 \\ y + z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + 5y + z + 2 = 0 \end{cases}$, hallar la ecuación de la recta “t” que pasa por el origen de coordenadas y se apoya en ambas. Hallar los puntos de apoyos R y Q de t con r y s.

Sol: $t \equiv \begin{cases} 2x + 4y + 5z = 0 \\ y + 7z = 0 \end{cases}$ R(23/12, -7/6, 1/6); Q(23/11, -14/11, 2/11)



Existen tres estrategias:

En primer lugar estudiamos la posición relativa de las dos rectas.

Ponemos r y s en paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2\lambda \end{cases} \qquad \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -2) \qquad P_r(2, -1, 0)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 + 17\mu \\ y = -7\mu \qquad \mu \in \mathbb{R} \\ z = \mu \end{cases} \qquad \overrightarrow{u_s} = (17, -7, 1) \qquad P_s(-1, 0, 0)$$

$\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{u_s}$ y además como $\overrightarrow{P_r P_s}(-3, 1, 0)$ se verifica $\left|\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_r P_s}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 17 & -7 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

luego r y s se cruzan.

Estrategia 1 (la más sencilla)

a) π_1=plano que contiene a "r" y pasa por P.

b) π_2=plano que contiene a "s" y pasa por P.

c) $t=\pi_1\cap\pi_2$

d) Los puntos de apoyo: $R=r\cap\pi_2=r\cap t$, $Q=s\cap\pi_1=s\cap t$

a) $\pi_1\equiv(r,\mathrm{P})$ consideramos el haz de planos:

$$\alpha(2x-y-5)+\beta(y+z+1)=0 \quad le \quad imponemos \quad que \quad pase \quad por \quad P(0,0,0)$$
$$\Rightarrow -5\alpha+\beta=0 \quad para \quad \alpha=1\Rightarrow\beta=5\Rightarrow 2x-y-5+5y+5z+5=0\Rightarrow$$
$$\pi_1\equiv 2x+4y+5z=0$$

b) $\pi_2\equiv(\mathrm{s},\mathrm{P})$ lo podemos hacer también por haz de planos o de forma geométrica, lo hacemos por su determinación lineal:

$$\pi_2\equiv\left(\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_sP},P_s\right)\Leftrightarrow \begin{array}{r}\overrightarrow{u_s}(17,-7,1)\\ \overrightarrow{P_sP}(-1,0,0)\\ P_s(-1,0,0)\end{array}\begin{vmatrix}x+1 & y & z\\ 17 & -7 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-y-7z=0\Leftrightarrow\pi_2\equiv y+7z=0$$

c) La recta solución es $t\equiv\begin{cases}2x+4y+5z=0\\ y+7z=0\end{cases}$

d) Los puntos de apoyo.

$$R=r\cap\pi_2\Leftrightarrow r\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=-1+2\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R}\\ z=-2\lambda\end{cases}\cap\ \pi_2\equiv y+7z=0\Leftrightarrow -1+2\lambda-14\lambda=0$$
$$\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{12}\Rightarrow R\left(\frac{23}{12},-\frac{7}{6},\frac{1}{6}\right)$$

También se podíamos calcularlo resolviendo el sistema: $R=r\cap t=\begin{cases}2x-y=5\\ y+z=-1\\ y+7z=0\end{cases}$

Ahora Q.

$$Q=s\cap t\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-3z=-1\\ 2x+5y+z=-2 \quad por \quad Cramer \quad o \quad bien\\ 2x+4y+5z=0\end{cases}$$

$$Q=s\cap\pi_1=ponemos \ s \ en \ paramétricas \ y \ sustituimos \ en\,\pi_1\Rightarrow Q\left(\frac{23}{11},-\frac{14}{11},\frac{2}{11}\right)$$

Estrategia 2

a) π_1=plano que contiene a "r" y pasa por P.

b) $Q = s \cap \pi_1$

c) La recta buscada es la que pasa por P y Q.

d) Los puntos de apoyo son Q que ya está calculado y $R = r \cap t$

a) Ya lo hemos calculado en la estrategia 1. $\pi_1 \equiv 2x + 4y + 5z = 0$

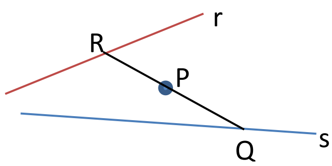
b) ya lo hemos hecho en la estrategia 1. $Q\left(\frac{23}{11}, -\frac{14}{11}, \frac{2}{11}\right)$

c) $t_{PQ} \equiv \left(\overrightarrow{PQ}, P\right)$ $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{23}{11}, \frac{-14}{11}, \frac{2}{11}\right) \Rightarrow \vec{u_t}\left(23, -14, 2\right) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 23\alpha \\ y = -14\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2\alpha \end{cases}$

d) Puntos de apoyo $Q\left(\frac{23}{11}, -\frac{14}{11}, \frac{2}{11}\right)$ y $R = r \cap t$

Estrategia 3

Por puntos genéricos.



Siendo R y Q los puntos de apoyo se verifica que $\overrightarrow{PR} \parallel \overrightarrow{PQ}$

$R \in r \Leftrightarrow \left(2+\lambda, -1+2\lambda, -2\lambda\right) \Rightarrow \overrightarrow{PR}\left(2+\lambda, -1+2\lambda, -2\lambda\right)$
$Q \in s \Leftrightarrow \left(-1+17\mu, -7\mu, \mu\right) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}\left(-1+17\mu, -7\mu, \mu\right)$ para que sean paralelos:

$$\frac{2+\lambda}{-1+17\mu} = \frac{-1+2\lambda}{-7\mu} = \frac{-2\lambda}{\mu} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{12}$$

$$t \equiv \left(\vec{u_r} = \overrightarrow{PR}\left(\frac{23}{12}, -\frac{14}{12}, \frac{2}{12}\right), P\left(0,0,0\right)\right) = \left(\vec{u_r} = \overrightarrow{PR}\left(23, -14, 2\right), P\left(0,0,0\right)\right) = \begin{cases} x = 23\alpha \\ y = -14\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2\alpha \end{cases}$$