Geometría euclídea en el espacio.

Ángulos y distancias

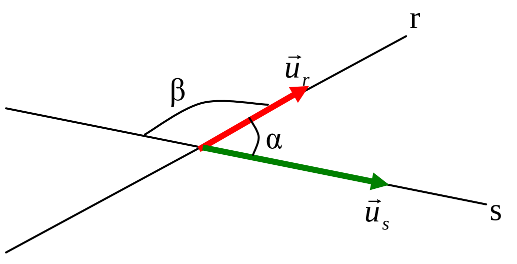
1. Distancia entre dos puntos

Sean A(x_0,y_0,z_0) y B(x_1,y_1,z_1), la distancia entre ambos es igual al módulo del vector

$$\overrightarrow{AB}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0) \text{ es decir } d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

2. Ángulo formado por dos rectas.

El ángulo formado por las rectas r y s se define como el menor de los ángulos formados por sus vectores directores.



$$\alpha=\left(\widehat{r,s}\right)=menor\left(\widehat{\vec{u}_r,\vec{u}_s}\right)$$

Sabemos que cosα=$\dfrac{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}$ como α y β son complementarios cosβ=-cosα, si tomamos el valor absoluto nos aseguraremos obtener el menor de los ángulos así: cosα=$\left|\dfrac{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}\right|$ i.e.

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{|\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s|}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}}.$$

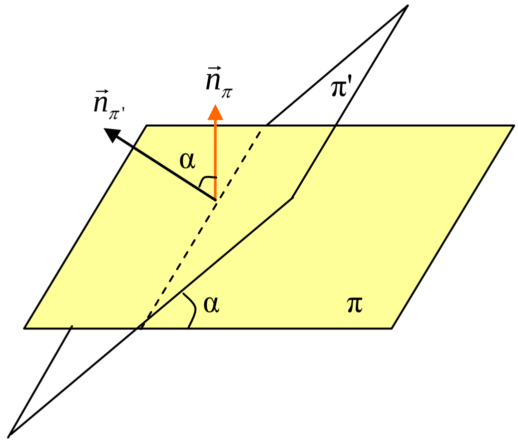
Ejemplo 1: Calcular el ángulo que forman las rectas $r\equiv\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{2}$ y $s\equiv\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$

Sol: $\cos\alpha=\dfrac{|(1,-1,2)\cdot(3,-1,2)|}{\sqrt{6}\sqrt{14}}=\dfrac{8}{\sqrt{84}}=\dfrac{4}{\sqrt{21}}\Rightarrow\alpha=\arccos\dfrac{4}{\sqrt{21}}=29^o\ 12'\ 21{,}36''$

Nota: Si las dos rectas se cruzan, el ángulo queda determinado como el formado por dos rectas secantes paralelas a las dades.

3. Ángulo formado por dos planos.

Dados los planos $\pi \equiv$ Ax+By+Cz+D=0 y $\pi' \equiv$A'x+B'y+C'z+D'=0 el ángulo, α, formado por ellos es el mismo que el formado por sus vectores característicos $\alpha = \angle(\pi, \pi') = \angle(\vec{n}_\pi, \vec{n}_{\pi'})$ así



$$\boxed{\cos\alpha = \cos(\pi, \pi') = \cos(\vec{n}_\pi, \vec{n}_{\pi'}) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_\pi| \cdot |\vec{n}_{\pi'}|}}$$

Ejemplo 2: Dados los planos π≡3x+2y+z-10=0 y π'≡2x-y+az-5=0 determinar el valor de "a" para que sean perpendiculares. Para ese valor de "a", determinar el vector director de la recta r=π∩π'

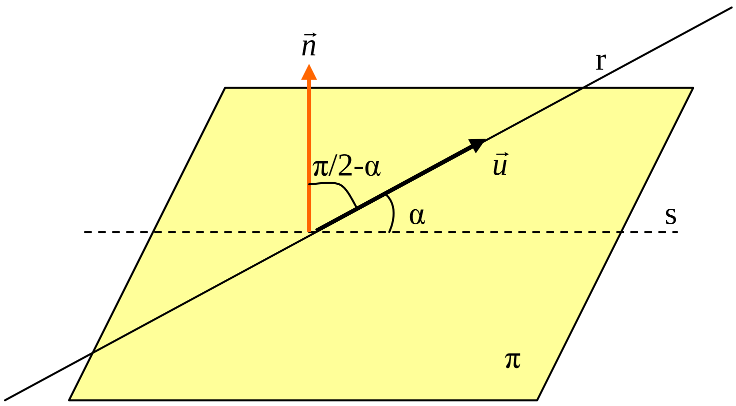
Sol.:; a=-4, $\vec{u}(1,-2,1)$

Ejemplo 3: Dados los planos π≡mx+y+z-15=0 y π'≡-2x+y-2z=0, determinar el valor "m" sabiendo que tgα= $\sqrt{2}$, siendo $\alpha = (\pi, \pi')$.

Sol.: m=-5 y m=1

4. Ángulo de recta y plano.

El ángulo formado por una recta y un plano, es el ángulo formado por las rectas r y s, siendo s la proyección de r sobre π. Así, el ángulo formado por la recta r y el plano π será el complementario del ángulo que forman el vector director de r y el vector característico del plano, es decir:



$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}}$$

Ejemplo 4: Calcular el ángulo formado por $r \equiv x - 2 = \frac{y+3}{2} = 1 - z$ con el plano π≡2x-3y+z+2=0.

Sol.: $sen\alpha = \frac{|(1,2,-1)\cdot(2,-3,1)|}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{84}} \Rightarrow \alpha = arcsen\frac{5}{\sqrt{84}} = 33^o\ 3'\ 42{,}83''$

Ejemplo 5: Dados la recta $r \equiv \frac{x}{2} = -y = z$ y el plano $\pi \equiv$x+y+mz-15=0, determinar "m" para que:

a) r y π formen un ángulo de 30º (m=2)

b) r y π sean paralelos (m=-1)

Ejemplo 6: Hallar la proyección de la recta r sobre el plano π del ejemplo 4 para m=1.

La proyección de r sobre π es la intersección del plano π'(plano que contiene a r y es perpendicular a π) con π.

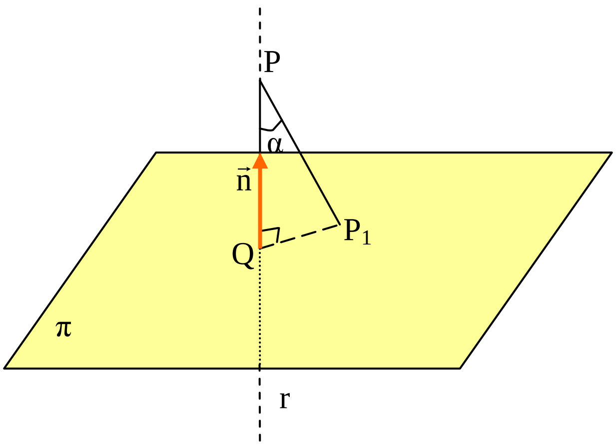
$$\pi' = (\overrightarrow{n_\pi}, \overrightarrow{u_r}, P_r) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi' = 2x + y - 3z = 0$$ la proyección es $s' = \pi \cap \pi' = \begin{cases} x + y + z - 15 = 0 \\ 2x + y + -3z = 0 \end{cases}$

Anaya página 194. Ejercicios 3c; 4b; 5a; 7.

5. Distancia de un punto a un plano.

Sea un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $\pi \equiv$Ax+By+Cz+D=0 se trata de calcular d(P,π)

Se define d(P,π)=min $\{d(P, P_1)$ t.q. $P_1 \in \pi\}$=d(P,Q)



● Geométricamente

i. Calcular una recta r perpendicular a π y pase por P i.e. determinada por $\vec{n}(A, B, C)$ y que pase por P.

ii. Hallar r∩π=Q (proyección de P sobre π)

iii. d(P,π)=d(P,Q)

- Puntos genéricos.

Tomamos un punto genérico del plano P_π que dependerá de dos parámetros, creamos el vector $\overrightarrow{PP_\pi}$, este vector tiene que ser proporcional al normal del plano $\overrightarrow{PP_\pi} \parallel \vec{n}$. De aquí obtenemos los parámetros que sustituidos en el plano me da las coordenadas del punto Q (proyección ortogonal de P sobre π) y luego d(P,π)=d(P,Q)

● Fórmula.

$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Demostración:

Sea $P_1(x_1,y_1,z_1)\in\pi$ genérico d(P,π)=d(P,Q)=$|\overrightarrow{PQ}|$ fijándonos el gráfico $|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PP_1}|\cos\alpha$ $\overrightarrow{PP_1}$

Haciendo el producto escalar $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PP_1}=|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PP_1}|\cdot\cos\alpha=|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|=|\vec{n}|\cdot d(P,\pi)$ $\Rightarrow d(P,\pi)=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PP_1}|}{|\vec{n}|}=$

$$=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1-Ax_0-By_0-Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\underbrace{=}_{P_1\in\pi\Leftrightarrow Ax_1+By_1+Cz_1+D=0}$$

$$\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ por tanto $$d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

<u>Ejemplo 7</u>: Hallar la distancia del punto P(1,-2,0) y el plano π≡2x-3y+z-1=0 y el simétrico de P respecto de π.

Sol.:

● Geométricamente:

$$r\equiv\begin{cases}r\perp\pi\\ r\ \text{pasando por P}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=z\ \text{ y }\ Q=r\cap\pi=\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\ \text{luego}\ d(P,\pi)=d(P,Q)=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

● Por puntos genéricos.

Un punto genérico del plano es: $P_\pi(\lambda,\mu,1-2\lambda+3\mu)$

Construimos el vector $\overrightarrow{PP_\pi}(\lambda-1,\mu+2,1-2\lambda+3\mu)$. Le imponemos la condición que tiene que ser paralelo al normal del plano $\overrightarrow{PP_\pi}\parallel\overrightarrow{n_\pi}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\lambda-1}{2}=\dfrac{\mu+2}{-3}=\dfrac{1-2\lambda+3\mu}{1}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \mu=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Con esos parámetros hallamos Q, proyección de P sobre π, $Q=\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\to d(P,\pi)=d(P,Q)=\frac{\sqrt{14}}{2}$

● Fórmula: $d(P,\pi)=\dfrac{|2.1-3.(-2)+1.0-1|}{\sqrt{2^2+3^2+1}}=\dfrac{7}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

■ Sea P'=simétrico de P respecto de π.

El punto Q=proyección de P sobre π, es el punto medio de $\overrightarrow{PP'}$

$$Q\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1+x'}{2},\frac{2+y'}{2},\frac{z'}{2}\right)\Rightarrow x'=-1;y'=-3,z'=-1\Leftrightarrow P'(-1,-3,-1)$$

Anaya pág. 194, ejercicios 9b; 9d; 10

6. Distancia de una recta a un plano

Si la recta y el plano tienen puntos en común, se cortan o coinciden, la distancia es cero.

En caso contrario, si $r \parallel \pi$ consideramos un punto de r, P_r la distancia de r a π es $d(r,\pi)=d(P_r,\pi)$.

Nota: lo primero que hay que hacer es estudiar la posición relativa de la recta y el plano.

Ejemplo 8: Calcular la distancia entre la recta $r\equiv(1-3\lambda,\ 2+\lambda,\ 1-\lambda)\quad \lambda\in\mathbb{R}$ y el plano $\pi\equiv x+3y=0$

Sol: Estudiamos la posición de r y π: $\overrightarrow{u_r}(-3,1,-1)\bullet\overrightarrow{n_\pi}(1,3,0)=0 \quad\Rightarrow\quad r\parallel\pi$.

$$d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|1\cdot1+2\cdot3|}{\sqrt{1+9}}=\frac{7}{\sqrt{10}}=\frac{7\sqrt{10}}{10} \qquad\qquad d(r,\pi)=\frac{7\sqrt{10}}{10}$$

Ejemplo 9: Hallar la proyección de r sobre π.

$r'=\pi\cap\pi'$ siendo π' el plano que contiene a r y es perpendicular π

$$\pi'(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{n_\pi},P_r)\ \text{con}\ \begin{cases}\overrightarrow{u_r}(-3,1,-1)\\ \overrightarrow{n_\pi}(1,3,0)\\ P_r(1,2,1)\end{cases}\ \text{por tanto}\ \pi'\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-1\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow\ \pi'\equiv 3x-y-10z+9=0$$

Proyección ortogonal $r'\equiv\begin{cases}x-3y=0\\ 3x-y-10z+9=0\end{cases}$

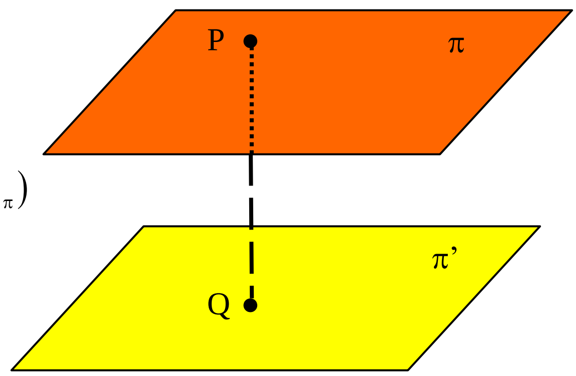
Anaya pág. 194, ejercicio 12b.

7. Distancia entre dos planos

Sean π≡ Ax+By+Cz+D=0 y π'≡A'x+B'y+C'z+D'=0, en general d(π,π')=min{d(P,π') t.q. P∈π

- Si no son paralelos d(π,π')=0
- Si son paralelos

• Forma geométrica



d(π,π')=d(P,π') t.q. P∈π para calcularla:

i. Hallar la recta r tal que r⊥π y pasa por P i.e. $r=(P,\vec{n}_\pi)$

ii. Hallar r∩π'=Q

iii. d(π,π')=d(P,π')=d(P,Q)

• Fórmula

$$\boxed{d(\pi,\pi')=\frac{|D'-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Demostración:

Al ser paralelos sus ecuaciones solo difieren en los términos independientes es decir:

$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi' \equiv Ax+By+Cz+D'=0$

$d(\pi,\pi')=d(P,\pi')$ t.q. $P(x_0,y_0,z_0)\in\pi$ ya sabemos que $d(P,\pi')=$

$$\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \underbrace{=}_{P\in\pi\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0=-D} \frac{|D'-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Nota: Para aplicar la fórmula las ecuaciones de los planos tienen que tener los mismos coeficientes de las variables.

Ejemplo 10: Hallar la distancia entre los planos $\pi\equiv 4x-2y+2z+4=0$ y $\pi'\equiv 2x-y+z-3=0$

- Geométricamente:

i. $r\perp\pi$ y pasa por $P(0,2,0)\in\pi \Leftrightarrow r(P(0,2,0),\vec{n}_\pi(2,-1,1)) \Rightarrow r\equiv\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=z \Leftrightarrow \begin{cases} x-2z=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$

ii. Calcular Q como $r\cap\pi'$ i.e. resolver el sistema $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x \quad -2z=0 \\ \quad y+z=2 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{5}{3},\frac{7}{6},\frac{5}{6}\right)$

iii. $d(\pi,\pi')=d(P,Q)=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{7}{6}-2\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{1}{6}\sqrt{150}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

- Fórmula

$d(\pi,\pi')=\frac{|-3-2|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

Anaya pág. 194, ejercicio 11a.

8. Distancia de un punto a una recta

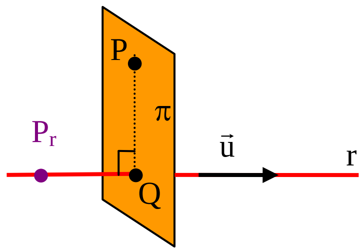
Sea un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y una recta $r\equiv\begin{cases} P_r(x_1,y_1,z_1) \\ \vec{u}(a,b,c) \end{cases}$ definimos la $d(P,r)=\min\{d(P,P_r)$ con $P_r\in r$

- Forma geométrica:

i. Crear un plano $\pi\perp r$ que pasa por P i.e. el vector normal del plano será el vector director de la recta $\pi(P,\vec{u})$

ii. Hallar $Q=\pi\cap r$ (proyección de P sobre r)

iii. $d(P,r)=d(P,Q)$

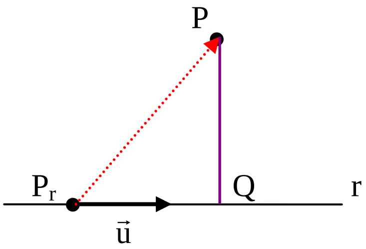


- Puntos genéricos.

  Tomamos un punto genérico de r, P_r, que dependerá de un parámetro.

  Construimos el vector $\overrightarrow{PP_r}$ y le imponemos la condición que debe ser perpendicular al vector director de r, $\overrightarrow{u_r} \Leftrightarrow \overrightarrow{PP_r} \perp \overrightarrow{u_r} \Leftrightarrow \overrightarrow{PP_r} \bullet \overrightarrow{u_r} = 0$

  de aquí sacamos el valor del parámetro que nos da la proyección de P sobre r, que llamamos Q y así d(P,r)=d(P,Q)

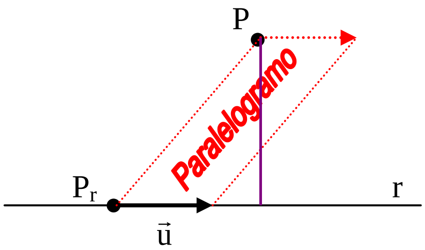


- Fórmula

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}}$$

Demostración:

Según observamos en el gráfico adjunto, d(P,r)=altura del paralelogramo determinado por el vector director de r y por el vector P_rP.



Sabemos que el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{P_rP}$ es:

Área del paralelogramo $\left|\overrightarrow{P_rP} \wedge \vec{u}\right| = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}| \cdot d(P,r) \Rightarrow \quad d(P,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{P_rP} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$

<u>Ejemplo 11</u>: Dado el punto P(1,-1,1) y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = z+5$ calcular la d(P,r)

- Geométricamente:

  i. $\pi \perp r$ que pasa por P. $\vec{u}(2,-1,1) \Rightarrow 2x - y + z + D = 0$ imponiéndole que pase por el punto P $\Rightarrow$

  2+1+1+D=0 $\Rightarrow$ D=-4 $\Rightarrow$ $\pi \equiv$ 2x-y+z-4=0

  ii. hallamos Q=$\pi \cap$r (lo más fácil en paramétricas) $\Rightarrow$ Q(7/3,-11/3,-13/3)

  iii. d(P,Q)=d(P,r)=$\dfrac{\sqrt{336}}{3}$

- Puntos genéricos.

Un punto genérico de r es: $P_r\left(1+2\lambda,-3-\lambda,-5+\lambda\right)$

Hacemos el vector: $\overrightarrow{PP_r}\left(2\lambda,-2-\lambda,-6+\lambda\right)$, le imponemos que sea perpendicular con el vector

director de la recta $\overrightarrow{PP_r}\bullet\vec{u}_r=0 \iff \left(2\lambda,-2-\lambda,-6+\lambda\right)\bullet\left(2,-1,1\right)=6\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda=\dfrac{2}{3}$

Hallamos la proyección sustituyendo el valor del parámetro en la ecuación de la recta:

Q(7/3,-11/3,-13/3) la distancia es d(P,r)=d(P,Q)= $\dfrac{\sqrt{336}}{3}$

- Fórmula: $d\left(P,r\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{P_rP}\wedge\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$

P(1,-1,1), P_r(1,-3,-5), $\vec{u}\left(2,-1,1\right) \Rightarrow \overrightarrow{P_rP}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & -6\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-8\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}$

$$d\left(P,r\right)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rP}\wedge\vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\frac{\sqrt{\left(-8\right)^2+12^2+4^2}}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{224}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{336}}{3}$$

Anaya pág. 194, ejercicios 13, 14

9. Distancia entre dos rectas

Sean dos rectas cuyas determinaciones lineales son:

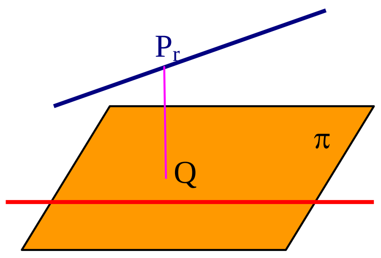
$r\equiv\begin{cases}P_r\left(x_0,y_0,z_0\right)\\ \vec{u}_r\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}P_s\left(x_1,y_1,z_1\right)\\ \vec{u}_s\end{cases}$ definimos la $d\left(r,s\right)=\text{mín}\left\{d\left(P_r,s\right)\ \text{tq}\ P_r\in r\right\}$

- Si r y s se cortan o coinciden entonces d(r,s)=0
- Si son paralelas d(r,s)=d(P_r,s)
- Si se cruzan entonces:

- Geométricamente:

i. Construir un plano π que contenga a s y sea paralelo a r

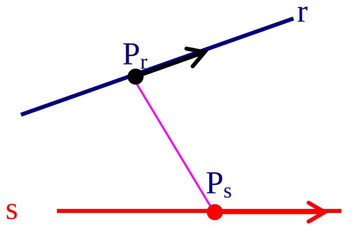
ii. d(r,s)=d(r,π)=d(P_r,π)



- Puntos genéricos.

Tomamos un punto genérico de cada recta $P_r \;\; y \;\; P_s$ que dependerán de dos parámetros.

Creamos el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ y le imponemos que tiene que ser perpendicular a las dos rectas es decir:



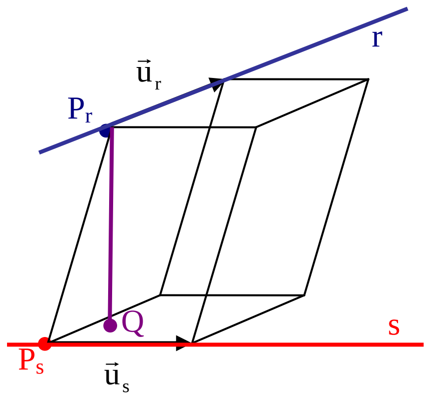
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_rP_s} \perp \overrightarrow{u_r} \;\; \Leftrightarrow \overrightarrow{P_rP_s} \bullet \overrightarrow{u_r} = 0 \\ \overrightarrow{P_rP_s} \perp \overrightarrow{u_s} \;\; \Leftrightarrow \overrightarrow{P_rP_s} \bullet \overrightarrow{u_s} = 0 \end{array}\right\} \text{ sacamos el valor de los dos parámetros}$$

que sustituyéndolos en las respectivas rectas obtenemos los dos puntos $(R \in r,\ S \in s)$ que nos van a determinar la distancia entre las dos rectas, por último d(r,s)=d(R,S).

- Fórmula

$$\boxed{d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP_s} \cdot (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s)\right|}{\left|\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s\right|}}$$

Demostración:



d(r,s)=altura del paralelepípedo determinado por $\vec{u}_r,\ \vec{u}_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}$

Sabemos que:

volumen del paralelepípedo = $\left|\overrightarrow{P_rP_s} \cdot (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s)\right|$

vol. del paralelepípedo = área de la base por la altura= $\left|\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s\right| \cdot h$

Luego: $\left|\overrightarrow{P_rP_s} \cdot (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s)\right| = \left|\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s\right| \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{\left|\overrightarrow{P_rP_s} \cdot (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s)\right|}{\left|\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s\right|} \Leftrightarrow \qquad d(r,s) = \dfrac{\left|\overrightarrow{P_rP_s} \cdot (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s)\right|}{\left|\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s\right|}$

Nota: lo primero que hay que hacer es estudiar la posición relativa de las rectas.

<u>Ejemplo 12</u>: Calcular la distancia de r a s siendo: $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$ y $s \equiv -x = y-3 = \dfrac{z-2}{-1}$.

Solución:

Primero estudiamos la posición relativa de las dos rectas, como sus vectores directores no son paralelos $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{0}{1} \neq \dfrac{-1}{-1}$

Calculamos ¿ $ran(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s})$?

$$\left.\begin{matrix}\vec{u}_r(2,0,-1) & P_r=(1,0,0)\\ \vec{u}_s(-1,1,-1) & P_s=(0,3,2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}2&0&-1\\-1&1&-1\\-1&3&2\end{vmatrix}=12$$

$\Rightarrow ran(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{P_rP_s})=3$ luego r y s se cruzan.

- Geométricamente:

i. Plano que contiene a r y es paralelo a s $\pi\equiv\begin{vmatrix}x-1&y&z\\2&0&-1\\-1&1&-1\end{vmatrix}=x+3y+2z-1=0$

ii. $d(P_s,\pi)=\dfrac{|9+4-1|}{\sqrt{1+9+4}}=\dfrac{12}{\sqrt{14}}=\dfrac{6}{7}\sqrt{14}$

- Por puntos genéricos

$$r\equiv\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=0\\ z=-\lambda\end{cases}\lambda\in\mathbb{R}\qquad s\equiv\begin{cases}x=-\mu\\ y=3+\mu\\ z=2-\mu\end{cases}\mu\in\mathbb{R}$$

Los puntos genéricos serán: $P_r=(1+2\lambda,0,-\lambda)$ y $P_s=(-\mu,3+\mu,2-\mu)$

Construimos el vector: $\overrightarrow{P_rP_s}(-2\lambda-\mu-1,\mu+3,\lambda-\mu+2)$

Le imponemos que sea perpendicular a los vectores directores de r y s:

$$\overrightarrow{P_rP_s}\bullet\vec{u}_r=(-2\lambda-\mu-1,\mu+3,\lambda-\mu+2)\bullet(2,0,-1)=-5\lambda-\mu-4=0$$
$$\overrightarrow{P_rP_s}\bullet\vec{u}_s=(-2\lambda-\mu-1,\mu+3,\lambda-\mu+2)\bullet(-1,1,-1)=\lambda+3\mu+2=0$$

obtenemos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas que al resolver obtenemos: $\lambda=-\dfrac{5}{7}$ y $\mu=-\dfrac{3}{7}$.

Sustituyendo estos valores en las correspondientes rectas obtenemos los puntos:

$R=\left(-\dfrac{3}{7},0,\dfrac{5}{7}\right)\in r$ y $S=\left(\dfrac{3}{7},\dfrac{18}{7},\dfrac{17}{7}\right)\in s$ Ahora d(r, s)=d(R, S)=$\sqrt{\dfrac{6^2}{7^2}+\dfrac{18^2}{7^2}+\dfrac{12^2}{7^2}}=\dfrac{\sqrt{504}}{7}=\dfrac{6\sqrt{14}}{7}$

- Fórmula $d(r,s)=\dfrac{\left|\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s)\right|}{|\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s|}$

$$\left.\begin{matrix}P_r(1,0,0);P_s(0,3,2)\Rightarrow\overrightarrow{P_rP_s}(-1,3,2)\\ \vec{u}_r(2,0,-1);\vec{u}_s(-1,1,-1)\Rightarrow\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&0&-1\\-1&1&-1\end{vmatrix}=(1,3,2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow d(r,s)=\frac{\begin{vmatrix}-1&3&2\\2&0&-1\\-1&1&-1\end{vmatrix}}{\sqrt{1+9+4}}=\frac{12}{\sqrt{14}}=\frac{6\sqrt{14}}{7}$$

Anaya pág. 195, ejercicio 18.

Anaya pág. 196, ejercicios 29, 30, 36, 43, 45, 46, 47, 52, 56, 57, 59, 61, 62, 63.