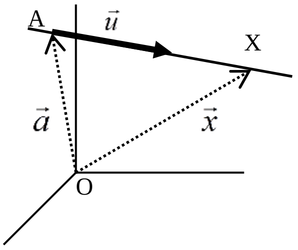
Geometría afín en el espacio. Rectas y planos

1. Ecuaciones de la recta



La ecuación de una recta viene determinada por un punto A(x_0,y_0,z_0)$\in R^3$ y un vector $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)\in V^3$ o por dos puntos A(x_0,y_0,z_0) , B(x_1,y_1,z_1) $\in R^3$ que viene a ser lo mismo. Al vector $\vec{u}$ llamaremos vector director de la recta.

Un punto cualquiera X(x,y,z) pertene a la recta r si el vector $\overrightarrow{AX}$ es proporcional al vector $\vec{u}$. Es decir que la recta que pasa por A y tiene como vector director a $\vec{u}$ está determinada por la ecuación: $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u}$ con $\lambda \in R$ teniendo en cuenta que $\overrightarrow{AX} = \vec{x} - \vec{a}$ se obtiene la ecuación:

1.1 Ecuación vectorial $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ con $\lambda \in R$

Poniéndola en coordenadas y componentes (x,y,z)= (x_0,y_0,z_0)+λ (u_1,u_2,u_3) con λ∈R separando las componentes obtenemos:

1.2 Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases} \quad \lambda \in R$$

Despejando λ de cada ecuación e igualándolas:

1.3 Ecuación continua

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

Si en lugar de conocer el vector director tenemos dos puntos se transforma en:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Operando estas igualdades, agrupando términos y ordenándolos obtenemos las

1.4 Ecuaciones cartesianas o implícitas

$$r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Como veremos más adelante ésta es una forma de representar una recta como intersección de dos planos.

Ejemplo 1: Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-1,-1,-1) y tiene por vector director $\vec{u}$ (0,-1,2) en sus diferentes expresiones.

a) Ecuación vectorial (x,y,z)=(-1,-1,-1)+λ(0,-1,2) λ∈R

b) Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$

c) Ecuación continua $\dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

d) Ecuaciones cartesianas $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$

Ejemplo 2: Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos A(1,-1,2) y B(0,-3,-2)

$\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{-4}$ siendo (-1,-2,-4) el vector director.

Calcula la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto y tiene el vector director indicado.

a) $A(2, -1, -1)$ y $\vec{v} = (-2, -4, 4)$ b) $A(1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-2, -2, -2)$

a) $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (2, -1, -1) + t(-2, -4, 4)$

b) $\vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(-2, -2, -2)$

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta, sabiendo que un punto y un vector director son:

a) $A(3, 0, -7)$ y $\vec{v} = (-10, 2, 6)$ b) $A(0, 0, 0)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 10t \\ y = 2t \\ z = -7 + 6t \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por cada par de puntos.

a) $A(2, -1, -1)$ y $B(0, -5, 3)$ b) $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, -1, -1)$

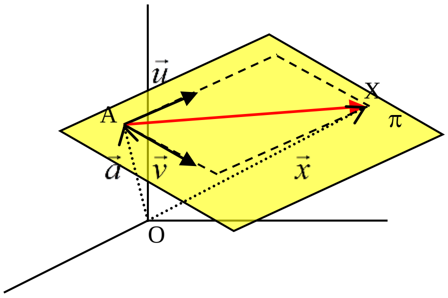
a) $\vec{AB} = (-2, -4, 4) \rightarrow \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z+1}{4}$

b) $\vec{AB} = (-2, -2, -2) \rightarrow \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{-2}$

2. Ecuaciones del plano

Un plano queda determinado por un punto A(x_0,y_0,z_0)$\in$R^3 y dos vectores $\vec{u}(u_1,u_2,u_3),\vec{v}(v_1,v_2,v_3)\in V^3$ linealmente independientes o por tres puntos no alineados.

Los vectores $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ se llaman vectores directores del plano.



Un punto X pertenece al plano π si el vector $\overrightarrow{AX}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ es decir $\overrightarrow{AX}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ $\quad\lambda,\mu\in R$ teniendo en cuenta que $\overrightarrow{AX}=\vec{x}-\vec{a}$ obtenemos la ecuación:

2.1 Ecuación vectorial $\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\quad\lambda,\mu\in R$

Considerando un sistema de referencia $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ tenemos que A(x_0,y_0,z_0), $\vec{u}(u_1,u_2,u_3),\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ sustituyendo en la ecuación anterior nos queda:

$\vec{x}=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(u_1,u_2,u_3)+\mu(v_1,v_2,v_3)\quad\lambda,\mu\in R$ separando por componentes:

2.2 Ecuaciones paramétricas $\begin{cases}x=x_o+\lambda u_1+\mu v_1\\ y=y_0+\lambda u_2+\mu v_2\\ z=z_0+\lambda u_3+\mu v_3\end{cases}\quad\lambda,\mu\in R$

2.3 Ecuación general o implícita

Hemos visto que un plano π queda determinado por un punto A(x_0,y_0,z_0)$\in$R^3 y dos vectores linealmente independientes $\vec{u}(u_1,u_2,u_3),\vec{v}(v_1,v_2,v_3)\in V^3$ que llamamos vectores directores i.e. π(A, $\vec{u},\vec{v}$) (se denomina determinación lineal del plano).

Un punto X pertenece al plano π si el vector $\overrightarrow{AX}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ es decir

$Rg\left(\overrightarrow{AX},\vec{u},\vec{v}\right)=2$ es decir $\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=0$ desarrollando por los adjuntos de los elementos de la 1ª fila se obtiene una expresión del tipo **Ax+By+Cz+D=0** que se denomina ecuación general o implícita del plano.

<u>Observación</u>: *a) si C≠0 entonces los vectores* $\vec{u}\left(C,0,-A\right)$ *y* $\vec{u}\left(0,C,-B\right)$ *son dos vectores directores.*

Ejemplo: Sea $\pi\equiv 3x+2y+z-4=0$*, dos vectores directores son:* $\vec{u}(1,0,-3),\ \vec{v}(0,1,-2)$

$$\text{Comprobación } \vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\rightarrow\vec{n}(3,2,1)$$

b) fijándonos en la ecuación general del plano y en las ecuaciones cartesianas de una recta es evidente que podemos pensar en una recta como intersección de dos planos.

2.4 Ecuación del plano que pasa por 3 puntos

Sean $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$ y $C(x_2,y_2,z_2)$ tres puntos no alineados entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes y los podemos tomar como vectores directores del plano.

Consideramos el plano $\pi\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ como hemos viso su ecuación será:

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x & y & z\\ 1 & x_0 & y_0 & z_0\\ 1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0$$

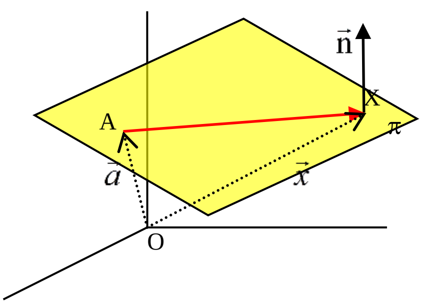
<u>Ejemplo 3</u>: Hallar las ecuaciones vectorial, paramétricas y general del plano π(A, $\vec{u},\vec{v}$) siendo A(1,2,5) $\vec{u}(2,-1,3)$ y $\vec{v}(5,2,-6)$. Sol. 3y+z-11=0

<u>Ejemplo 4</u>: Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1,-1,1), B(0,-3,2) y C(1,0,-2)

Sol -5x+3y+z+7=0

<u>Ejemplo 5</u>: Comprobar si los puntos A(1,2,11), B(-1,3,7), C(2,-5,0) y D(-4,2,-4) son coplanarios. Sol Si

2.5 Ecuación normal



Otra forma de determinar un plano π es conociendo un punto $A(x_0,y_0,z_0)\in\pi$ y un vector normal a él. $\vec{n}(n_1,n_2,n_3)$

El plano π está formado por todos los puntos X tal que el vector $\overrightarrow{AX}$ *es ortogonal a* $\vec{n}$ es decir $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AX}=0 \Leftrightarrow \vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{a})=0$ que se denomina ecuación normal del plano.

Poniendo esta ecuación en componentes obtenemos:

$$(n_1,n_2,n_3)(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$
$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$$
$$n_1x+n_2y+n_3z-(n_1x_0+n_2y_0+n_3z_0)=0$$

relacionándolo con la ecuación implícita del plano Ax+By+Cz+D=0 tenemos que n_1=A; n_2=B; n_3=C por lo tanto un vector normal al plano es $\vec{n}(A,B,C)$.

Al vector $\vec{n}(A,B,C)$ se le denomina vector característico del plano.

Lo que queda claro es que podemos determinar el plano π mediante un punto y un vector ortogonal i.e. π(A, $\vec{n}$) se denomina determinación normal del plano.

Recordemos que cuando damos el plano por un punto y dos vectores π(A, $\vec{u},\vec{v}$) se denomina determinación lineal del plano.

Ejemplo 6: Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2,-1,5) y tiene como vector característico (1,-1,3).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n} \Rightarrow x-y+3z+D=0\\ A(2,-1,5) \Rightarrow 2+1+15+D=0 \Rightarrow D=-18\end{array}\right\} \Rightarrow x-y+3z-18=0$$

Ejemplo 7: Hallar la ecuación del plano que pasa por A(2,3,1) y B(5,2,-1) es perpendicular al plano $\pi \equiv 3x-2y+z-5=0$

2.6 Ecuación segmentaría

Es la ecuación del plano referida a los puntos de corte con los ejes cartesianos:

$$\pi \cap OX=(a,0,0) \qquad \pi \cap Oy=(0,b,0) \qquad \pi \cap OZ=(0,0,c)$$

Si hallamos la ecuación del plano que pasa por esos tres puntos podemos obtener una expresión del tipo $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Es evidente que los tres puntos verifican esta ecuación.

Ejemplo 8: Plano determinado por una recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$ y un punto A(2,0,1) exterior a ella.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1} \begin{cases} \to \vec{u}(2,1,-1) \\ \to B(1,-3,0) \end{cases} \qquad \overrightarrow{AB}(-1,-3,-1) \;\; podemos\ tomar\ \ \vec{v}(1,3,1)$$

la determinación lineal del plano será $\pi(A,\vec{u},\vec{v})$

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3i - j - 7k \;\Leftrightarrow\; \vec{n}(3,1,7) \;\Rightarrow\; 3x + y + 7z + D = 0$$

imponiéndole que pase por el punto A(2,0,1) 6+0+7+D=0 ⇒ D=-13. Solución: π≡ 3x+y+7z-13=0

Ejemplo 9: hallar la ecuación de un plano π’ que contenga la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1}$ y sea perpendicular al plano $\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in R$

$$\vec{u}_{\pi'} \equiv (2,-3,-1) \quad A_{\pi'}(1,1,-1)$$

$$\vec{v}_{\pi'} = \vec{u}_{\pi} \wedge \vec{v}_{\pi} = \vec{n}_{\pi} \quad \vec{u}_{\pi}(1,1,0),\ \vec{v}_{\pi}(-1,0,1) \;\Rightarrow\; \vec{v}_{\pi'} \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - j + k$$

La determinación lineal del plano que se demanda es

$$\pi'(A,\vec{u}_{\pi'},\vec{v}_{\pi'})\ y\ por\ \tan to\ \vec{u}_{\pi'} \wedge \vec{v}_{\pi'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4i - 3j + k \text{ tomando}$$

$$\vec{n}(4,3,-1)) \Rightarrow 4x + 3y - z + D = 0\ \ y\ haciendole\ pasar\ por\ A \Rightarrow 4x + 3y - z - 8 = 0$$

Ejemplo 10: Dada la ecuación del plano π≡ 2x+y-8z=4. Hallar los puntos de corte con los ejes coordenados y el área del triángulo que determinan.

$$OX \to y = 0,\ z = 0 \Rightarrow x = 2 \to A(2,0,0)$$
$$OY \to x = 0,\ z = 0 \Rightarrow y = 4 \to B(0,4,0)$$
$$OZ \to x = 0,\ y = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \to C\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|(-2,-1,8)\right| = \frac{\sqrt{69}}{2}\ u^2$$

Observaciones: Cuando tomamos vectores para la determinación de planos o rectas se pueden multiplicar por un número real (simplificar,) pues lo único que nos interesa de ellos es su dirección y ésta se mantiene constante.

Ahora bien, cuando vayamos a calcular áreas o volúmenes no lo podemos hacer ya que en estos casos también necesitamos utilizar, por lo menos, la información del módulo.

Lo que nunca se puede hacer es multiplicar por escalares los puntos, ya que obviamente cambiamos de punto.

En los ejemplos anteriores hemos multiplicado los vectores salvo en el último que teníamos que hallar un área.

Ejercicio 1: Hallar la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo al plano π_1 determinado por el punto A(1,-1,0) y la recta que pasa por el punto B(2,2,2) y tiene por vector director (1,2,3). Sol 5x-y-z=0

Ejercicio 2: Hallar la ecuación del plano perpendicular al segmento que une los puntos A(2,-1,3) y B(-4,2,2) y pasa por el punto medio. Sol: 6x-3y+z+5=0

Relación: “ Ejercicios rectas y planos I ”

Anaya. Página 166. Ejercicios: 9; 10; 11; 12; 14.

Página 167. Ejercicios: 21, 22, 25, 27, 33, 38, 39, 41, 55.

015 Calcula la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto y tiene el vector director indicado.

a) $A(2, -1, -1)$ y $\vec{v} = (-2, -4, 4)$ b) $A(1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (-2, -2, -2)$

a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (2, -1, -1) + t(-2, -4, 4)$

b) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v} \rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(-2, -2, -2)$

016 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta, sabiendo que un punto y un vector director son:

a) $A(3, 0, -7)$ y $\vec{v} = (-10, 2, 6)$ b) $A(0, 0, 0)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 10t \\ y = 2t \\ z = -7 + 6t \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

017 Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por cada par de puntos.

a) $A(2, -1, -1)$ y $B(0, -5, 3)$ b) $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, -1, -1)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4) \rightarrow \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z+1}{4}$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2) \rightarrow \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{-2}$

018 Halla las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por cada par de puntos.

a) $A(3, 0, -7)$ y $B(-7, 2, -1)$

b) $A(0, 0, 0)$ y $B(1, 0, 0)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-10, 2, 6) \rightarrow \dfrac{x-3}{-10} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+7}{6}$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 6 = -10y \\ 6x - 18 = -10z - 70 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 5y - 3 = 0 \\ 6x + 10z + 52 = 0 \end{array}\right\}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0) \rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

019 Obtén la ecuación vectorial del plano en cada caso.

a) $A(2, -1, -1)$, $B(0, -5, 3)$ y $C(1, 1, 1)$

b) $A(1, 1, 1)$, $B(-1, -1, -1)$ y $C(1, 2, 2)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 2)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \rightarrow (x, y, z) = (2, -1, -1) + \lambda(-2, -4, 4) + \mu(-1, 2, 2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -2)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(-2, -2, -2) + \mu(0, 1, 1)$

020 Halla las ecuaciones paramétricas del plano correspondiente.

a) $A(3, 0, -7)$, $\vec{u} = (-10, 2, 6)$ y $\vec{v} = (0, 3, 10)$

b) $A(0, 0, 0)$, $\vec{u} = (1, 0, 0)$ y $\vec{v} = (4, 4, 4)$

a) $\pi\!: \left.\begin{array}{l} x = 3 - 10\lambda \\ y = 2\lambda + 3\mu \\ z = -7 + 6\lambda + 10\mu \end{array}\right\}$ $\qquad$ b) $\pi\!: \left.\begin{array}{l} x = \lambda + 4\mu \\ y = 4\mu \\ z = 4\mu \end{array}\right\}$

021 Halla la ecuación general del plano que pasa por el punto $P(-1, 0, 2)$ y contiene a la recta de ecuación:

$$r\!: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{3}$$

El plano está definido por $P(-1, 0, 2)$, el vector director de la recta $\vec{v}_2 = (1, -1, 3)$ y el vector $\overrightarrow{AP}$, con $A(1, 3, -4) \in r$.

$\overrightarrow{AP} = (-2, -3, 6)$

$$\pi\!: \begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi\!: 3x - 12y - 5z + 13 = 0$$

022 Obtén la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A(1, 1, -7)$, $B(5, -2, 9)$ y $C(5, -4, 0)$.

$\overrightarrow{AB} = (4, -3, 16)$ $\qquad \overrightarrow{AC} = (4, -5, 7)$

$$\pi\!: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+7 \\ 4 & -3 & 16 \\ 4 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi\!: 59x + 36y - 8z - 151 = 0$$

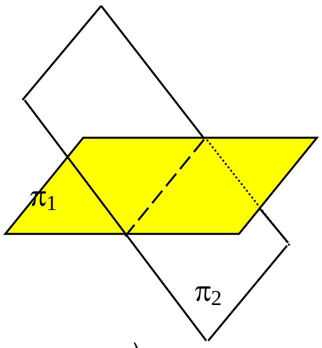
3. Posiciones relativas de dos planos.

Sean dos planos cualesquiera de ecuaciones $\begin{array}{l}\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\end{array}$

Estudiar su posición relativa equivale a discutir el sistema formado por ellos. Utilizando el teorema de Rouche-Frobenius:

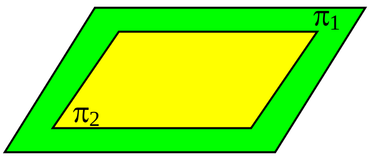
$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

- Si RgM=RgM* sistema compatible
  - Si **RgM=RgM*=2** $< 3 \Rightarrow$ S.C.I. $\Leftrightarrow \infty$ soluciones dependiendo de un parámetro $\Leftrightarrow$ se cortan en una recta (ecuaciones cartesianas de la recta) $\Leftrightarrow$ **planos secantes**.



La recta es la solución del sistema $\left(\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \wedge \vec{n}_{\pi_2}\right)$

  - Si **RgM=RgM*=1** $< 3 \Leftrightarrow$ S.C.I. $\Leftrightarrow \infty$ soluciones dependiendo de dos parámetros $\Leftrightarrow$ las ecuaciones son proporcionales $\Leftrightarrow$ **planos coincidentes**



- Si RgM≠RgM* sistema incompatible
  - Si **RgM=1 y RgM*=2** $\Rightarrow$ S.I. $\Leftrightarrow$ no existe solución $\Leftrightarrow$ **planos paralelos**.

Observación: De aquí se obtiene la condición de paralelismo:

Si RgM=1 implica que los coeficientes de las variables en ambas ecuaciones son proporcionales y si el RgM=2 quiere decir que no lo son los términos independientes i.e.*

$$A_1 = kA_2,\ B_1 = kB_2, C_1 = kC_2,\ D_1 \neq kD_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

De estos resultados se deducen las fórmulas para obtener las posiciones relativas de dos planos:

- Planos paralelos ------ $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
- Planos coincidentes -- $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$
- Planos secantes ------- $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ *o* $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$

Ejemplo 11: Hallar la intersección de los planos: $\begin{cases} \pi_1 \equiv 3x - 2y + 3z = 1 \\ \pi_2 \equiv x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$

$$Rg\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow RgM = RgM^* = 2 \Rightarrow \textit{es una recta.}$$

Varios métodos de resolución:

a) $\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \wedge \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -8i + 9j + 14k$

hallamos un punto de la recta: para x=0 $\begin{cases} -2y + 3z = 1 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{4}\ \ z = \frac{1}{2} \iff P\left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

la recta será $\frac{x}{-8} = \frac{y - \frac{1}{4}}{9} = \frac{z - \frac{1}{2}}{14}$

b) Se elimina la variable y de las dos ecuaciones dando 7x+4z=2

se elimina la variable z de las dos ecuaciones dando 9x+8y=2

después despejando la variable x de estas dos nuevas ecuaciones obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{4z-2}{-7}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-\frac{7}{4}} \\ x=\dfrac{8y-2}{-9}=\dfrac{y-\frac{1}{4}}{-\frac{9}{8}} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-\frac{1}{4}}{-\frac{9}{8}}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-\frac{7}{4}}$$

c) Resolviendo como un sistema compatible e indeterminado:

llamamos a x=λ $\Rightarrow \begin{cases} -2y+3z=1-3\lambda \\ 4y-2z=-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\dfrac{2-9\lambda}{8} \\ z=\dfrac{2-7\lambda}{4} \end{array}$ por tanto la ecuación será: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\frac{1}{4}-\frac{9}{8}\lambda \\ z=\frac{1}{2}-\frac{7}{4}\lambda \\ \lambda\in R \end{cases}$

Ejercicio 3: Determinar la posición relativa de los planos $\begin{array}{l} \pi_1 \equiv 3x-2y+4z-2=0 \\ \pi_2 \equiv 2x+3y-5z+8=0 \end{array}$ y dar la ecuación de los puntos que tienen en común en caso de tenerlos.

Sol. $\pi_1 \cap \pi_2 = r \quad \vec{u}_r(-2,23,13)$

Ejercicio 4: Idem con $\begin{array}{l} \pi_1 \equiv 3x-2y+4z-1=0 \\ \pi_2 \equiv -6x+4y-8z+2=0 \end{array}$ Sol. π_1 *coincide con* π_2

Ejercicio 5: Idem. $\begin{array}{l} \pi_1 \equiv 3x-2y+4z-1=0 \\ \pi_2 \equiv -6x+4y-8z+7=0 \end{array}$ Sol $\pi_1 \| \pi_2$

Ejercicio 6: calcular la ecuación de dos planos que se corten en la siguiente recta:

$\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=-2+5\lambda \end{cases} \quad \lambda\in R$ (idéntico a lo realizado en teoría cuando calculamos las ecuaciones cartesianas de una recta)

Anaya. Página 167. Ejercicio 37.

030 **Halla la posición relativa de estas parejas de planos.**

a) $\pi_1: -x + 2y - z = 0$
$\pi_2: x - 2y + z + 1 = 0$

b) $\pi_1: x - z + 11 = 0$
$\pi_2: -2y - z + 11 = 0$

a) $\text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Los planos son paralelos.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & -1 & 11 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son secantes.

031 **Estudia la posición relativa de los planos.**

a) $\pi_1: -6x + 5y - 3z + 2 = 0$
$\pi_2: x - y + z = 0$

b) $\pi_1: x - 2y - z + 1 = 0$
$\pi_2: -2x + 4y - 2z + 3 = 0$

a) $\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son secantes.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 2$

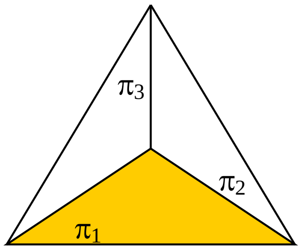
Los planos son secantes.

4. Posiciones relativas de tres planos

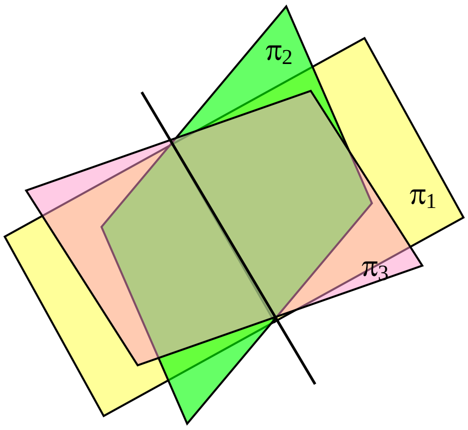
Sean tres planos cualesquiera de ecuaciones: $\begin{matrix} \pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{matrix}$ formamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y aplicamos el teorema de Roché-Frobeniüs:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

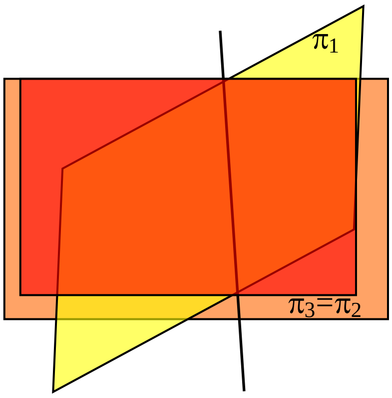
- RgM=RgM* sistema compatible:
  - **RgM=RgM*=3** ⇔ S.C.D. ⇔ existe una única solución ⇔ **tres planos que se cortan en un punto** (formando un triedro)



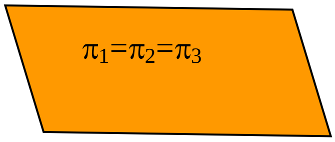
  - **RgM=RgM*=2**<n=3 ⇔ S.C.I. ⇔ ∞ soluciones dependiendo de un parámetro ⇔ una recta ⇔
    - **3 planos secantes coincidentes en un recta**



▪ **2 planos coincidentes y uno secante**



○ **RgM=RgM*=1**<n=3 ⇔ ∞ soluciones dependiendo de dos parámetros ⇔ solución un plano ⇔ **tres planos coincidentes.**

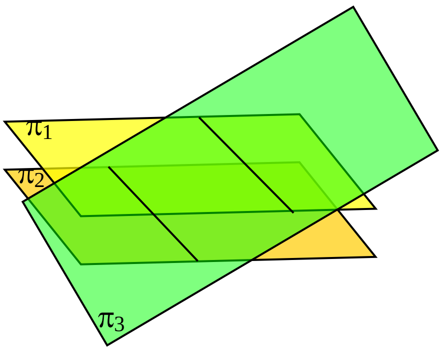


Se estudian las posiciones relativas de los planos dos a dos.

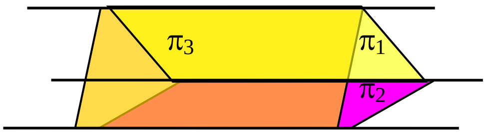
- RgM≠RgM* sistema in compatible ⇔ no tiene solución:

○ **RgM=2 y RgM*=3** los tres vectores característicos no son paralelos

▪ **2 planos paralelos y otro secante.**

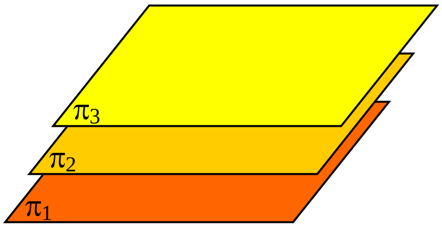


▪ **3 planos secantes dos a dos**.

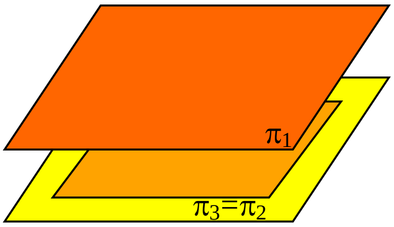


Las tres rectas que determinan son paralelas.

- **RgM=1 y RgM*=2** los tres vectores característicos son paralelos
  - **3 planos paralelos**



  - **2 coincidentes y otro paralelo**



Se estudian las posiciones relativas de los planos dos a dos.

Ejemplo 12: Hallar los valores de K para que los planos $\pi_1 \equiv x+y+kz=1$, $\pi_2 \equiv Kx+y+z=1$ y $\pi_3 \equiv 2x+y+z=K$ tengan una recta en común. Hallar su vector director.

Solución:

$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 \Leftrightarrow$ recta $\Leftrightarrow$ S.C.I. dependiendo de un parámetro $\Leftrightarrow$ RgM=RgM*=2

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k = 1 \wedge k = 2$$

- si k=1 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\; orlando \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow RgM = RgM^* = 2$ y por lo tanto los planos se cortan

  en una recta cuyo vector director será el producto vectorial de los vectores característicos L.I.

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_2} \wedge \vec{n}_{\pi_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = j - k = (0,1,-1)$$

- si k=2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ *orlando* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ sistema icompatible.

Solución k=1.

Ejemplo 13: Se consideran los planos $\pi_1 \equiv x+ky+z=k+2$, $\pi_2 \equiv x+y+kz=-2(k+1)$, $\pi_3 \equiv kx+y+z=k$.

Determinar según los valores de k, las posiciones relativas de los planos (i.e. dar la interpretación geométrica del sistema de ecuaciones).

Sol. $M = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & k+2 \\ 1 & 1 & k & -2(k+1) \\ k & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = (2+k)(k-1)^2 = 0 \Rightarrow k=-2 \wedge k=1$

- si $k \neq -2 \wedge k \neq 1 \Rightarrow$ RgM=RgM*=3 $\Leftrightarrow$ S.C.D. $\Leftrightarrow$ tres planos que se cortan en un punto (que es la solución del sistema)
- si k=1 RgM=1≠RgM*=2 $\Leftrightarrow$ S.I.

  Estudiamos las posiciones relativas de los planos 2 a 2:

  $\pi_1 \cap \pi_2 \equiv 1/1=1/1=1/1 \neq -3/4 \Rightarrow \pi_1 || \pi_2$

  $\pi_1 \cap \pi_3 \Rightarrow \pi_1 || \pi_3$

  por tanto los tres planos son paralelos
- si $k=-2 \Rightarrow$ RgM=RgM*=2 $\Leftrightarrow$ S.C.I. dependiendo de un parámetro $\Leftrightarrow$ la solución es una recta

  Estudiamos las posiciones relativas de los planos 2 a 2:

  $\pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow \pi_1$ y π_2 secantes

  $\pi_1 \cap \pi_3 \Rightarrow \pi_1$ y π_3 secantes

  $\pi_2 \cap \pi_3 \Rightarrow \pi_1$ y π_3 secantes

  Luego tres planos no coincidentes que se cortan a lo largo de una recta.

Anaya. Página 167. Ejercicio 32.

5. Haz de planos que pasan por un punto.

Se llama haz de planos de vértice B, al conjunto de todos los planos que pasan por B.

Sea $B(x_0, y_0, z_0)$ y $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ un plano perteneciente al haz de planos de vértice B, se verifica: $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \Rightarrow D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$ y sustituyendo $Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0 \Rightarrow$

$$\mathbf{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

y dando los posibles valores a A, B, C se obtienen todos los planos del haz de planos.

6. Haz de planos paralelos.

Se llama haz de planos paralelos a uno dado, al conjunto de todos los planos que son paralelos a ese plano.

El vector característico (normal) de todas es el mismo $\vec{n}(A,B,C)$, entonces su ecuación es

$$\mathbf{Ax+By+Cz+D=0}$$

y dando todos los posibles valores a D se obtienen todos los planos.

Ejemplo 14: Hallar un plano paralelo al plano $3x-2y+z-3=0$ que pase por el punto $P(1,-2,0)$.

Solución: la determinación normal del plano buscado es $\pi(\vec{n}(3,-2,1), P(1,-2,0))$ luego la ecuación del haz de planos es: $3x-2y+z+D=0$, le imponemos que pase por el punto P $\Rightarrow 3+4+D=0 \Rightarrow D=-7$

Sol: $3x-2y+z-7=0$

7. Haz de planos secantes.

Planos que contienen una recta.

Dados dos planos $\begin{matrix} \pi_1 \equiv A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ \pi_2 \equiv A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{matrix}$, secantes, se llama haz de planos secantes al conjunto de todos los planos que contienen a la recta de $\pi_1 \cap \pi_2$.

La ecuación es: $\alpha\pi_1+\beta\pi_2=0 \Leftrightarrow \alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ dando valores a α y β vamos obteniendo todos los planos.

Su figura gráfica es similar a un libro abierto.

Ejemplo 15: Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(2,-1,3) y contiene a la recta :

$$\pi_1 \equiv x - y + z = 2$$
$$\pi_2 \equiv 2x + y - z + 1 = 0$$

Solución mediante haz de planos:

haz de planos $\alpha(x - y + z - 2) + \beta(2x + y - z + 1) = 0$ le imponemos que pase por el punto P(2,-1,3) $\Rightarrow$

$4\alpha+\beta=0 \Rightarrow \beta=-4\alpha$ para $\alpha=1 \Rightarrow \beta=-4 \Rightarrow$ sol. 7x+5y-5z+6=0

Este tipo de ejercicios ya lo hemos resuelto anteriormente calculando un vector director del plano como producto vectorial de los vectores característicos de los planos que determinan la recta. Luego hallamos un punto de la recta y tomamos como segundo vector director el vector que une los dos puntos que junto con el punto del enunciado nos permite hallar la ecuación del plano buscado.

$$\vec{u}_\pi = \vec{n}_{\pi_1} \wedge \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3j + 3k = (0,3,3) \Rightarrow \textit{ podemos tomar como } \vec{u}(0,1,1)$$

Calculamos un punto de la recta: hacemos z=0 y resolvemos el sistema $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Q(1/3,-5/3,0)

luego $\pi(P, \vec{u}, \overrightarrow{PQ})$ $\overrightarrow{PQ}\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -3\right) \approx (5,2,9)$

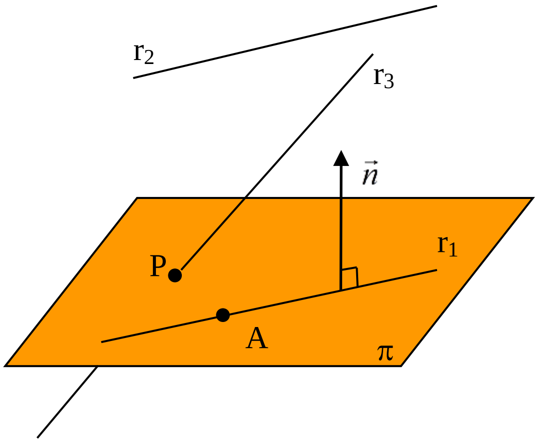
$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 7i + 5j - 5k = (7,5,-5) \Rightarrow 7x + 5y - 5z + D = 0$$ imponiendo que pase por P

obtenemos D=6 $\Rightarrow$ sol. 7x+5y-5z+6=0

8. Posición relativa entre recta y plano.

Partimos de que la recta viene dada como su determinación lineal $r(A,\vec{u})$

Sean la recta $r \equiv \frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}$ y el plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$, estudiando la relación que existe entre el vector característico del plano $\vec{n}$ y el vector director de la recta $\vec{u}$ tenemos:



- si $\vec{u}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}=0$
  - **A∈π** entonces **r está en π** ($r\subset\pi$) $\Rightarrow r_1$
  - **A∉π** entonces **r es paralela a π** ($r\parallel\pi$) $\Rightarrow r_2$
- si $\vec{u}$ **no es perpendicular con** $\vec{n} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0 \Rightarrow$ **r corta a π** $\Leftrightarrow r\cap\pi=P \Rightarrow r_3$.

__Observación__: se cortan perpendicularmente si $\vec{u}\parallel\vec{n} \Leftrightarrow \vec{u}\wedge\vec{n}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ y $\vec{n}$ proporcionales.

Esta es la manera más recomendable de realizar el estudio.

Ahora bien, si la recta viene dada por intersección de dos planos podemos hacerlo estudiando la posición de los tres planos que ya hemos estudiado en el apartado 7, teniendo en cuenta que el RgM≥2, pues la recta está determinada por dos planos con vectores característicos L.I. así tenemos:

$$r \equiv \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \quad y \quad \pi \equiv A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

- RgM=RgM* sistema compatible
  - RgM=RgM*=3 ⇔ S.C.D. ⇔ solución un punto ⇔ r corta a π.
  - RgM=RgM*=2 ⇔ S.C.I. ⇔ solución una recta ⇔ r está en π.
- RgM≠RgM* sistema incompatible
  - RgM=2 y RgM*=3 ⇔ S.I. ⇔ no hay solución ⇔ r es paralela a π.

<u>Observación</u>: Para hallar la solución (o estudio de las posiciones relativas) de una recta dada mediante su determinación lineal, y un plano, es muy recomendable poner la recta en paramétricas y sustituirlas en la ecuación del plano.

<u>Ejemplo 16</u>: Determinar la posición relativa de la recta $r \equiv \frac{x-2}{-7} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{-3}$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2y - 5z + 5 = 0$ y su intersección si existe.

Solución: $r\left(A(2,4,3), \vec{u}_r(-7,1,-3)\right)$ $\quad \vec{n}_\pi(3,2,-5)$

Calculamos $\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-7,1,-3)(3,2,-5) = -4 \neq 0 \Leftrightarrow$ r corta a π

Pasamos la recta a paramétricas: $\begin{cases} x = 2 - 7\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases}$ $\lambda \in R$ las sustituimos en la ecuación del plano $\Rightarrow$

$3(2-7\lambda)+2(4+\lambda)-5(3-3\lambda)+5=0 \Rightarrow \lambda=1$ la solución es P(-5,5,0)

<u>Observación</u>: Se puede hacer directamente pasando la recta a paramétricas, sustituyendo en la ecuación del plano y estudiando el resultado obtenido:

- *$k\lambda=t$ ($k\neq 0$) ecuación resoluble $\Leftrightarrow$ tiene sol $\Rightarrow$ se cortan.*
- *0=0 es una identidad $\Leftrightarrow \infty$ soluciones $\Leftrightarrow$ coinciden.*
- *k=0 ($k\neq 0$) ecuación imposible $\Leftrightarrow$ no tiene sol $\Leftrightarrow$ son paralelos.*

<u>Ejemplo 17</u>: Determinar la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 7z - 6 = 0 \\ x + y - z - 4 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x - y + z - 8 = 0$ dando los puntos comunes si los tiene.

Solución: $\vec{u}_r = (3,2,-7) \wedge (1,1,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5i - 4j + k \approx (5,-4,1)$ $\qquad \vec{n}_\pi(3,-1,1)$

$\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = (5,-4,1)(3,-1,1) = 20 \neq 0 \Leftrightarrow$ r corta a π.

Ponemos la recta en paramétricas z=λ y resolvemos $\begin{cases} 3x+2y=7\lambda+6 \\ x+y=\lambda+4 \end{cases}$ obteniendo $\begin{cases} x=-2+5\lambda \\ y=6-4\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

sustituyendo en el plano 3(5λ-2)-(6-4λ)+λ-8=0 ⇔ 20λ-20=0 ⇔ λ=1

Sol: P=r∩π=(3,2,1)

Haciéndolo por rangos RgM=RgM*=3 sistema compatible determinado ⇔ se cortan en un punto que se obtiene resolviendo el sistema por Cramer x=3, y=2, z=1.

Ejemplo 18: Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$ y el plano π≡ 2x-y+mz=1 determinar sus posiciones relativas dependiendo de los diferentes valores del parámetro m.

Solución (tres estrategias)

Estrategia 1:

Ponemos la recta en paramétricas y sustituimos en el plano.

$$r \equiv \begin{cases} x=1-\dfrac{1}{3}\lambda \\ y=1+\dfrac{4}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R \quad \text{sustituyendo en el plano}$$

$$2\left(1-\frac{1}{3}\lambda\right)-1-\frac{4}{3}\lambda+m\lambda=1 \Rightarrow (m-2)\lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} si\ m\neq 2 \Rightarrow se\ cortan \\ si\ m=2\ (0=0) \Rightarrow coincidentes \end{cases}$$

Estrategia 2:

Por rangos: |A|=-3(m-2) |A|=0 ⇒ m=2

- m≠2 ⇒ RgM=RgM*=3 ⇒ se cortan
- m=2 ⇒ RgM=2=RgM* ⇒ recta contenida en el plano

Estrategia 3:

Comparando los vectores director de la recta y característico del plano.

$$\vec{u}_r=(1,1,-1)\wedge(2,-1,2)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=i-4j-3k\approx(1,-4,-3)$$

$$\vec{u}_r\cdot\vec{n}_\pi=(1,-4,-3)(2,-1,m)=6-3m=0$$

- m=2 $\Leftrightarrow$ $\vec{u}_r\cdot\vec{n}_\pi=0$ $\Leftrightarrow$ paralelos o coincidentes. Tomamos un punto de la recta para ello hacemos

  z=0 y resolvemos $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ obteniendo A(1,1,0)

  veamos si está en π 2.1-1+0=1 $\Rightarrow$ la recta está contenida en el plano.

- m$\neq$2 $\Leftrightarrow$ $\vec{u}_r\cdot\vec{n}_\pi\neq 0$ $\Leftrightarrow$ se cortan.

Ejercicio 7: Hallar el valor de m para que la recta $r\equiv\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=-1 \end{cases}$ y el plano $\pi\equiv$ x+my-z-6=0

a) sean paralelos

b) sean perpendiculares

solución: $r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases}$ $\quad\vec{u}_r(1,-1,-1)\quad P_r(0,1,-1)\qquad\vec{n}_\pi(1,m,-1)$

a) $\vec{u}_r\cdot\vec{n}_\pi=(1,-1,1)\cdot(1,m,-1)=2-m$

- si m=2 $\Rightarrow$ paralelos o coincidentes ¿$P_r\in\pi$? 0+2+1+6$\neq$0 $\Rightarrow$ recta paralela al plano
- si m$\neq$2 $\Rightarrow$ se cortan

sol paralelos para m=2

b) se cortan perpendicularmente $\Leftrightarrow$ $\vec{u}_r \,||\, \vec{n}_\pi$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}_r$ *es proporcial a* $\vec{n}_\pi$ $\Rightarrow$1/1=m/-1=-1/-1 $\Rightarrow$ m=-1

solución se cortan perpendicularmente para m=-1.

Si lo hacemos con productos vectoriales:

$$\vec{u}_r\wedge\vec{n}_\pi=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix}=(1+m)i-(1+m)k=(0,0,0)\Rightarrow\ 1+m=0\ \Rightarrow m=-1$$

Anaya. Página 167. Ejercicio 34.

028 Calcula la posición relativa de la recta y el plano:

$$r\colon \left.\begin{aligned} x+y-z+2&=0\\ -x+3y-z+1&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \pi\colon\ x+z+1=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano se cortan en un punto.

029 Halla la posición relativa de la recta y el plano:

$$r\colon \frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1} \qquad \pi\colon 2x-5y+3z+3=0$$

$$r\colon \frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{r} 2x=y+2 \\ -x=z-1 \end{array}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{array}{r} 2x-y-2=0 \\ x+z-1=0 \end{array}\right\}$$

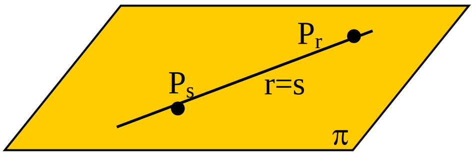
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano se cortan en un punto.

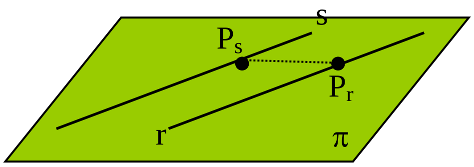
9. Posiciones relativas de dos rectas.

Tomamos las rectas expresadas en sus determinaciones lineales $r(P_r,\vec{u}_r)$ y $s(P_s,\vec{u}_s)$

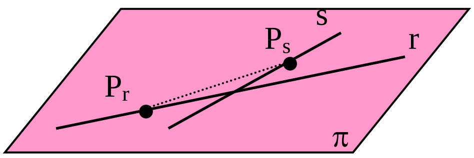
- Si $\vec{u}_r \| \vec{u}_s$ ⇔Rg($\vec{u}_r,\vec{u}_s$)=1 ⇔ vectores proporcionales ⇔ $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s = \vec{0}$
  - **P_r∈s** ⇔ Rg($\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{P_rP_s}$)=1 ⇔ S.C.I. ⇔ ∞ soluciones dependiendo de un parámetro ⇔ **r y s coincidentes**



  - **P_r∉s** ⇔ Rg($\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{P_rP_s}$)=2 ⇔ S.I. ⇔ no hay soluciones ⇔ **r y s son paralelas**

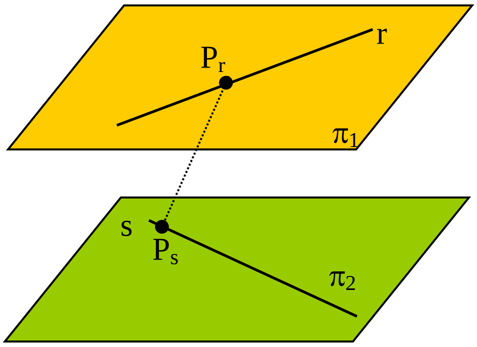


- $\vec{u}_r$ *no paralelos* $\vec{u}_s$ ⇔ Rg($\vec{u}_r,\vec{u}_s$)=2 ⇔ vectores no proporcionales ⇔ $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s \neq \vec{0}$
  - **Rg($\vec{u}_r,\vec{u}_s,\overrightarrow{P_rP_s}$)=2** ⇔ S.C.D. ⇔ una solución ⇔ **r y s son secantes** (se cortan)



poner las rectas en paramétricas y resolver el sistema obtenido en función de los parámetros de r y s.

- **Rg(**$\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rP_s}$ **)=3** $\Leftrightarrow$ S.I. $\Leftrightarrow$ no tiene solución $\Leftrightarrow$ **r y s se cruzan.**



Se sabe si al proceder como en el apartado anterior el sistema no tiene solución.

Se llega a esta conclusión por exclusión de los casos anteriores.

La estrategia a seguir para resolver estos problemas es:

1º comprobar si los vectores directores de las rectas son proporcionales.

2º si afirmativo: pueden ser paralelas o coincidentes, para discriminarlo tomamos un punto de una recta y vemos si está en la otra.

3º si falso: resolvemos el sistema de 3x2 (poniendo las rectas en paramétricas).

Este método es especialmente útil para hallar el punto de corte entre dos rectas

Ejemplo 19: Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{-1} \qquad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z+5}{1}$$

Solución: $\vec{u}_r(-3,2,-1) \quad P_r(2,-4,5) \qquad \vec{u}_s(2,4,1) \quad P_s(0,4,-5)$

$$¿\vec{u}_r \| \vec{u}_s? \quad -\frac{3}{2} \neq \frac{2}{4} \Rightarrow \text{se cortan o se cruzan}$$

Hacemos el vector $\overrightarrow{P_rP_s}(-2,8,-10) \approx (-1,4-5)$ y calculamos el Rg($\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rP_s}$) $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 78 \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rg}(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rP_s})=3 \Rightarrow \text{las rectas r y s se cruzan.}$$

Ejemplo 20: Dar la posición relativa y los puntos en común si los tiene las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{-1} \qquad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}$$

Solución: $\vec{u}_r(-3,2,-1)$ $P_r(2,-4,5)$ $\vec{u}_s(2,4,1)$ $P_s(1,2,5)$

¿$\vec{u}_r \| \vec{u}_s$? $-\frac{3}{2} \neq \frac{2}{4} \Rightarrow$ se cortan o se cruzan

$\overrightarrow{P_rP_s}(-1,6,0) \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ Rg($\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rP_s}$)=2 $\Rightarrow$ r y s se cortan.

Para hallar el punto de corte expresamos las rectas en paramétricas:

$r \equiv \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = -4+2\lambda \\ z = 5-\lambda \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} x = 1+2\mu \\ y = 2+4\mu \\ z = 5+\mu \end{cases} \Rightarrow$ resolvemos $\begin{matrix} 2-3\lambda = 1+2\mu \\ -4+2\lambda = 2+4\mu \\ 5-\lambda = 5+\mu \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda+2\mu = 1 \\ 2\lambda+4\mu = 6 \\ \lambda+\mu = 0 \end{cases}$ como es un

S.C.D. tomamos dos ecuaciones y lo resolvemos $\Rightarrow$ λ=1 y μ=-1 $\Rightarrow$ el punto de corte es P(-1,-2,4).

En el caso que las rectas nos vengan dadas como intersección de dos planos es recomendable sacar los vectores directores y estudiarlas como lo acabamos de ver.

Pero también se puede estudiar las posiciones relativas estudiando el sistema formado por las cuatro ecuaciones, teniendo en cuenta que el rango mínimo tiene que ser dos pues las rectas deben estar determinadas por dos planos L.I. así

Sea $r \equiv \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0 \end{cases}$ y $r \equiv \begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3 = 0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4 = 0 \end{cases}$ entonces

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

- RgM=RgM* $\Leftrightarrow$ Sistema compatible
  - RgM=RgM*=3 $\Leftrightarrow$ S.C.D. $\Leftrightarrow$ Una solución $\Leftrightarrow$ rectas secantes.
  - RgM=RgM*=2 $\Leftrightarrow$ S.C.I. $\Leftrightarrow$ ∞ sol. dependiendo de 1 param. $\Leftrightarrow$ rectas coincidentes.
- RgM$\neq$RgM* $\Leftrightarrow$ Sistema incompatible
  - RgM=3 y RgM*=4 $\Rightarrow$ se cruzan.
  - RgM=2 y RgM*=3 $\Rightarrow$ rectas paralelas.

Relación: “ Ejercicios rectas y planos II ”

024 **Determina la posición de estas rectas:**

$$r\colon (x, y, z) = (0, -5, 3) + t(1, 1, 1)$$

$$s\colon \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$$

$$r\colon \begin{cases} P(0, -5, 3) \\ \vec{u} = (1, 1, 1) \end{cases}$$

$$s\colon \begin{cases} Q(3, 0, -2) \\ \vec{v} = (2, 2, 2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (3, 5, -5)$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son paralelas.

025 **Determina las posiciones relativas de las siguientes rectas:**

$$r\colon (x, y, z) = (2, 2, 2) + t(1, 1, 1)$$

$$s\colon (x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 0, 0)$$

$$r\colon \begin{cases} P(2, 2, 2) \\ \vec{u} = (1, 1, 1) \end{cases}$$

$$s\colon \begin{cases} Q(0, 0, 0) \\ \vec{v} = (1, 0, 0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (-2, -2, -2)$$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

026 **Estudia la posición relativa de estas rectas:**

$$r\colon \left.\begin{array}{r} -x+2y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} x+y-z+2=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas son secantes.

027 **Estudia la posición relativa de las rectas:**

$$r\colon \left.\begin{array}{r} y-z-3=0 \\ 2x-z+1=0 \end{array}\right\}$$

$$s\colon \left.\begin{array}{r} -y+z=0 \\ x-3y+z-1=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

Las rectas se cruzan.

Anaya. Página 166. Ejercicios: 16, 17, 18, 30, 45, 46b, 54, 60, 67, 69, 70.

Página 171. Autoevaluación ejercicio 6.

"Perpendicular común" Ejercicio 9 y 11 de "Rectas y Planos III"

Anaya. Página 196. Ejercicios 32; 38; 51.

"Proyecciones ortogonales" Anaya. Página 197.

Punto sobre plano. Ejercicio 42.

Punto sobre recta. Ejercicios 34; 44.

Recta sobre plano. Ejercicio 50.

Ejercicios finales antes de distancias.

Anaya. Página 195-196-197. Ejercicios 23; 31; 47.

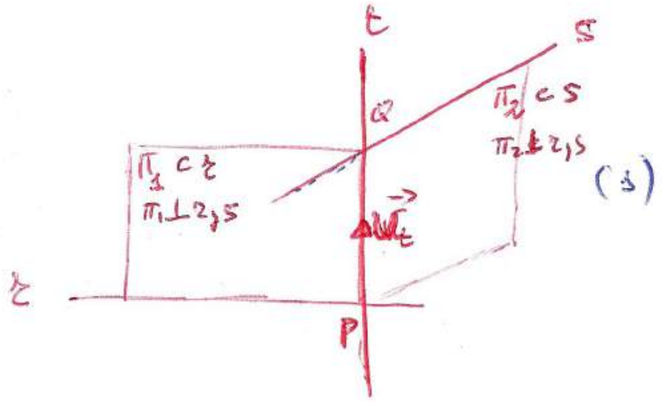
91 Rectas y planos III

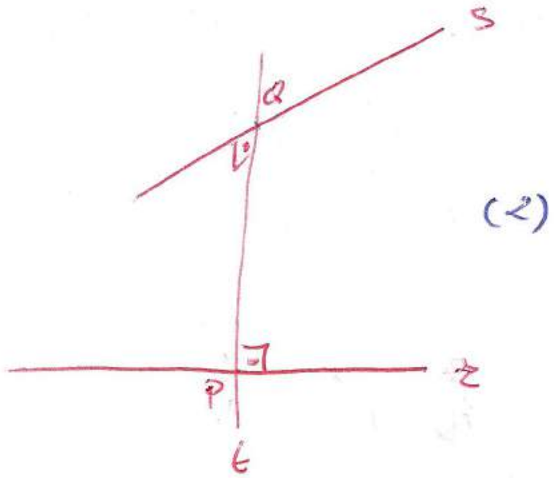
PERPENDICULAR COMÚN A 2 RECTAS

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -1 - \mu \\ z = 3\mu \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$





a) Posición relativa $r \equiv \vec{u}_r\,(0, 1, 2) \quad P_r\,(0, 1, -3)$

$\vec{u}_r \not\parallel \vec{u}_s \qquad s \equiv \vec{u}_s\,(1, -1, 3) \quad P_s\,(1, -1, 0)$

Tomamos $\overrightarrow{P_rP_s}\,(1, -2, 3)$ calculamos $Rg(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rP_s})$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow Rg(\;) = 3 \Rightarrow \text{se cruzan.}$$

b) Estrategia 1 (1)

i) π_1 contiene $\subset r$ y $\perp$ a r y s (i.e $\pi_1 \subset r$ y $\pi_1 \subset t$)

ii) $\pi_2 \subset s$ y $\perp$ a r y s (i.e. $\pi_2 \subset s$ y $\pi_1 \subset t$)

iii) Perpendicular común $t \equiv \pi_1 \cap \pi_2$

iv) Ptos de apoyos $P = r \cap \pi_2$, $Q = s \cap \pi_1$

Estrategia 2 Ptos genéricos.

i) $P \in r$, $Q \in s$

ii) $\overrightarrow{PQ} \perp r \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}_r \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_r = 0$

$\overrightarrow{PQ} \perp s \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}_s \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_s = 0 \Rightarrow$ Sacamos P y Q

iii) t sol es t_{PQ} (P y Q son los ptos de apoyo)

Estrategia 1

Primero calculamos un vector $\perp$ a r y a s

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}_t \perp \vec{u}_s \\ \vec{u}_t \perp \vec{u}_r\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u}_t = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

i) $$\pi_1 (\vec{u}_r, \vec{u}_t, P_r) \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y-1 & z+3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1 \equiv x - 2y + z + 5 = 0$$

ii) $$\pi_2 (\vec{u}_s, \vec{u}_t, P_s) \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_2 \equiv 5x - 16y - 7z - 21 = 0$$

iii) $$t = \pi_1 \cap \pi_2 \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 5 = 0 \\ 5x - 16y - 7z - 21 = 0 \end{cases}$$

iv) Ptos de apoyo:

- $P = r \cap \pi_2 \Rightarrow$ ponemos r en paramétricas y sust. en π_2

$$-16(1+\lambda) - 7(-3+2\lambda) - 21 = 0 \Rightarrow \lambda = -8/15 \Rightarrow P\left(0, \frac{7}{15}, -\frac{61}{15}\right)$$

- $Q = s \cap \pi_1$ = pto de apoyo sobre s.

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -1 - \mu \\ z = 3\mu \end{cases} \quad \text{sust. en } \pi_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \mu + 2(1+\mu) + 3\mu + 5 = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{4}{3} \Rightarrow Q\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -4\right)$$

Estrategia 2

i) $P \in r \Leftrightarrow P(0,\ 1+\lambda,\ -3+2\lambda)$

$Q \in s \Leftrightarrow Q(1+\mu,\ -1-\mu,\ 3\mu)$

$\overrightarrow{PQ}\ (1+\mu,\ -\lambda-\mu-2,\ -2\lambda+3\mu+3)$

ii)

$\odot\ \overrightarrow{PQ} \perp r \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}_r \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_r = 0$

$(1+\mu,\ -\lambda-\mu-2,\ -2\lambda+3\mu+3)(0,1,2) = 0$

$-\lambda-\mu-2-4\lambda+6\mu+6 = 0$

$-5\lambda+5\mu+4=0$

$\odot\ \overrightarrow{PQ} \perp s \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}_s \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}_s = 0$

$(1+\mu,\ -\lambda-\mu-2,\ -2\lambda+3\mu+3)(1,-1,3) = 0$

$1+\mu+\lambda+\mu+2-6\lambda+9\mu+9=0$

$-5\lambda+11\mu+12=0$

$$\begin{array}{r} +5\lambda \pm 5\mu = +4 \\ -5\lambda + 11\mu = -12 \\ \hline 6\mu = -8 \end{array} \Rightarrow \mu = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$-5\lambda+5\mu=-4 \Rightarrow -5\lambda - \frac{20}{3} = -4 \Rightarrow \lambda = -8/15$

Luego $P = \begin{cases} x=0 \\ y = 1-8/15 = 7/15 \\ z = -3+2\cdot(-8/15) = -61/15 \end{cases}$ $\quad Q \equiv \begin{cases} x = 1-4/3 = -1/3 \\ y = -1+4/3 = 1/3 \\ z = 3\cdot(-4/3) = -4 \end{cases}$

iii) $r_{PQ} \equiv \begin{cases} \overrightarrow{PQ}\ (-1/3,\ -2/15,\ 1/15) \sim (-5,-2,1) \\ P(0,\ 7/15,\ -61/15) \end{cases}$

$r \equiv \begin{cases} x = -5\alpha \\ y = \frac{7}{15} - 2\alpha \\ z = -\frac{61}{15} + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

11) Perpendicular común

$r \equiv \begin{cases} x = 2z+1 \\ y = -z+3 \end{cases}$ $\quad r \equiv \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$ $\quad \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \approx (2,-1,1)$

$P_r(1,3,0)$

$s \equiv \begin{cases} x-2=0 \\ y+3=0 \end{cases}$ $\quad s \begin{cases} \vec{u}_s\ (0,0,1) \\ P_s\ (2,-3,0) \end{cases}$

① P.R $\vec{u}_r \parallel \vec{u}_s$ $\quad \frac{0}{2} = \frac{0}{-1} \neq \frac{1}{1}$ $\quad \vec{u}_r \nparallel \vec{u}_s \Rightarrow$ se cortan o cruzan.

$\text{ran}(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{P_rP_s}) = 3$ pues $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = +11 \neq 0 \Rightarrow$ r y s se cruzan.

② Hallamos un vector $\perp \vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$ que será el vector director de la recta buscada "t"

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} \approx (-1,-2,0) = \vec{u}_t$

* Plano $\pi_1 \subset r$ y $\perp$ a r y s ($\subset$ "t") $\quad \pi_1(\vec{u}_r, \vec{u}_t, P_r)$

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv 2x + y - 3z - 5 = 0$$

* Plano $\pi_2 \subset s$ y $\perp$ a r y s ($\subset$ "t") $\quad \pi_2(\vec{u}_s, \vec{u}_t, P_s)$

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 2x + y - 1 = 0$$

$$t \equiv \begin{cases} 2x + y - 3z - 5 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Ptos de apoyo $R \in r$ y $S \in s$

$R = r \cap \pi_2$ $\quad \begin{cases} x = 2z+1 \\ y = -z+3 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$ $\quad R\left(-\frac{5}{3}, \frac{13}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

$Q = s \cap \pi_1$ $\quad \begin{cases} x-2=0 \\ y+3=0 \\ 2x+y-3z-5=0 \end{cases}$ $\quad S(2,-3,-4/3)$