Programación lineal

Los problemas de programación lineal son problemas de optimización.

Tenemos un determinado problema, del cuál existen varias soluciones, pero queremos encontrar la mejor verificando una serie de condiciones.

Ejemplo 1:

La compañía "AmoralCan", produce dos tipos de alimentos para perros, marcas A y B, respectivamente. Cada lata de la marca A contiene 200 gr de carne y 100 gr de harina. La marca B contiene 140 gr de carne y 160 de harina por lata. Las instalaciones pueden manipular un máximo de 78 kg de carne y 48 kg de harina por hora. Si el beneficio obtenido de la marca A es de 3€ por lata y el de la B es de 2,4€ por lata. ¿Cuántas latas de cada marca deben de producirse por hora para maximizar el beneficio?

Llamando x=nº de latas/hora de A e y=nº de latas/hora de B se trata de maximizar la función beneficio **z=3x+2,4y** que se denomina **FUNCIÓN OBJETIVO**.

Pero queremos maximizar z con una serie de restricciones que nos imponen las instalaciones y la capacidad de las latas.

	Marca A	Marca B	Por hora disponemos de
Carne	200 gr	140 gr	78 000 gr
Harina	100 gr	160 gr	48 000 gr
Beneficio	3 €	2,4 €	

$$\begin{cases} 200x + 140y \leq 78000 \\ 100x + 160y \leq 48000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

RESTRICCIONES DEL PROBLEMA

Vemos que nos aparecen las inecuaciones, por esto vamos a empezar dando un rápido repaso de desigualdades e inecuaciones lineales de una y dos variables.

1. Desigualdades.

- $a < b \Leftrightarrow b - a$ es positivo

$a > b \Leftrightarrow a - b$ es positivo

$a \leq b \Leftrightarrow b - a$ es positivo o nulo

$a \geq b \Leftrightarrow a - b$ es positivo o nulo

REGLAS PARA OPERAR

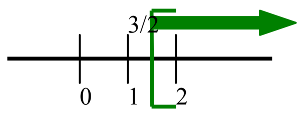
- Si $a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall c \in R$
- Si $a < b$ y $c < d \Rightarrow a+c < b+d$
- Si $a < b$ y $c>0 \Rightarrow a.c < b.c$ y $a/c < b/c$
- Si $a < b$ y $c<0 \Rightarrow a.c > b.c$ y $a/c > b/c$

2. Inecuaciones lineales

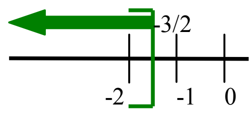
a) **Con una incognita** $ax \ ? \ b$ con $? = <, >, \geq, \leq$ y $a \in R$, $b \in R$

- Se despeja la variable x, y se obtiene como solución una semirrecta.

Ejemplo: $2x \geq 3 \Rightarrow x \geq 3/2$ Sol $[3/2, +\infty)$



Ejemplo: $-2x>3 \Rightarrow x<-3/2$ Sol $(-\infty, -3/2]$

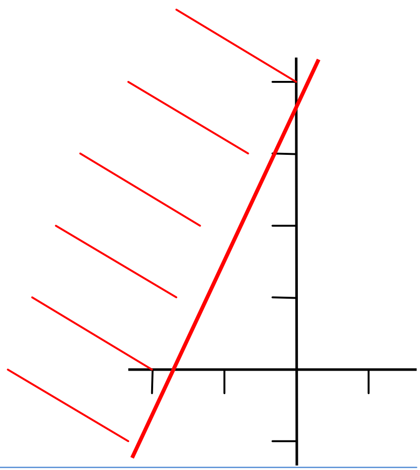


b) **Con dos incógnitas** $ax+by \ ? \ c$ $a, b, c \in R$

Se despeja la variable y en función de x, y se obtiene como solución un semiplano.

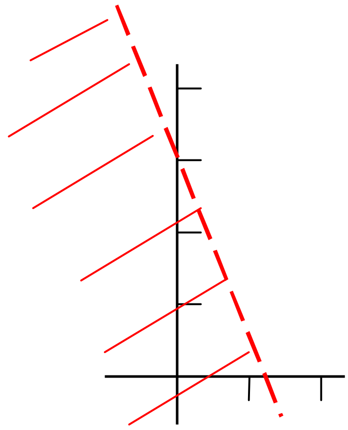
Ejemplo: $-4x+2y \geq 7 \Leftrightarrow$
$y \geq 2x+7/2$

x	y
0	7/2
-7/4	0
1	11/2



Ejemplo: 9x+3y<12 ⇔ y<-3x+4

x	y
0	4
4/3	0
1	1



3. Sistema de inecuaciones lineales

- Es un conjunto de inecuaciones lineales que se deben satisfacer a la vez.

La solución es el recinto donde coinciden las soluciones de cada una de las inecuaciones que forman parte.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + y \geq 3 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$$

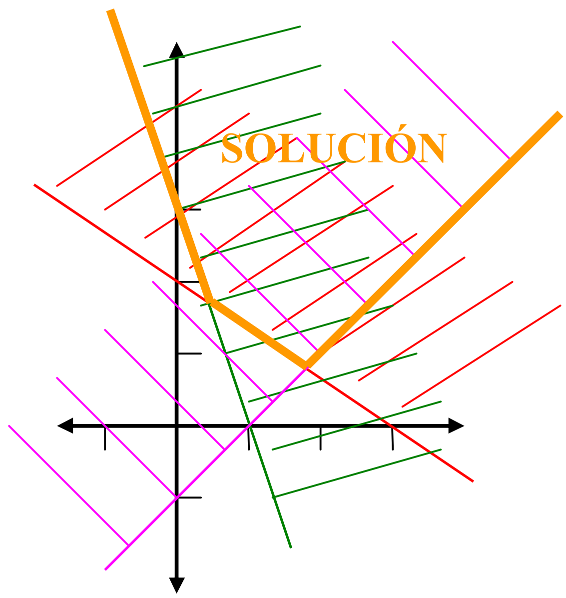
Solución:

$$\begin{cases} y \geq 3 - 3x \\ y \geq 2 - \frac{2}{3}x \\ y \geq x - 1 \end{cases}$$

x	y
0	-1
1	0

x	y
0	2
3	0

x	y
0	3
1	0



En programación lineal a la solución del conjunto de restricciones se le denomina **solución factible**.

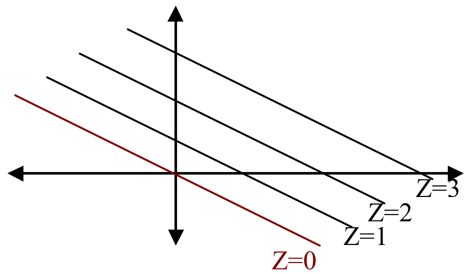
4. Funciones lineales de dos variables

- Se llama función lineal de dos variables "x" e "y" a cualquier expresión de la forma z=ax+by (z=p(x,y)) con a, b∈R y "x" e "y" variables.

Esta expresión es la que hemos visto en la función objetivo.

La representación gráfica en el espacio es un plano que pasa por el origen de coordenadas.

En este tema lo que nos interesa es su representación gráfica en el plano. En el plano z=ax+by es una familia de rectas paralelas, dependiendo de los valores que le demos a "z". Se denominan rectas de nivel.



Para z=0 ⇔ ax+by=0 tenemos la recta que denominaremos "objetivo cero" todas las demás serán paralelas a ella.

Volviendo al ejemplo 1:

$$\begin{cases} 200x + 140y \leq 78000 \\ 100x + 160y \leq 48000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

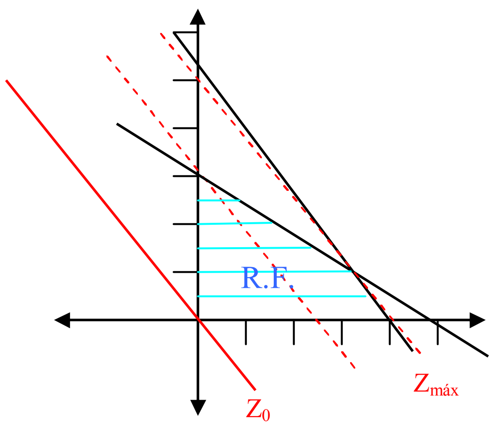
3x+2,4y=0

y=(-3/2,4)x=(-5/4)x

C(0,300)

$\boxed{B(320,100)}$

A(390,0)



En el punto B se alcanza el óptimo, esto se interpreta diciendo que el máximo beneficio se obtiene produciendo 320 latas/hora del tipo A y 100 latas/hora del tipo B.

El beneficio máximo es el resultado de evaluar la función z en este punto:

Beneficio máximo = z=3x+2,4y= 3.320+2,4.100=1200 €

<u>TEOREMA FUNDAMENTAL</u>

" Si existe una solución única que maximice o minimice una función lineal objetivo, ésta debe hallarse en uno de los vértices de la región factible"

Esto simplifica mucho, ya que ahora solo tendremos que estudiar la función objetivo en unos determinados puntos y aquel que nos de el máximo o mínimo valor es el buscado.

En el ejemplo (1) la tendremos que mirar en:

Vértice	Z=beneficio
O(0,0)	0
A(390,0)	117.000
B(320,100)	120.000
C(0,300)	72.000

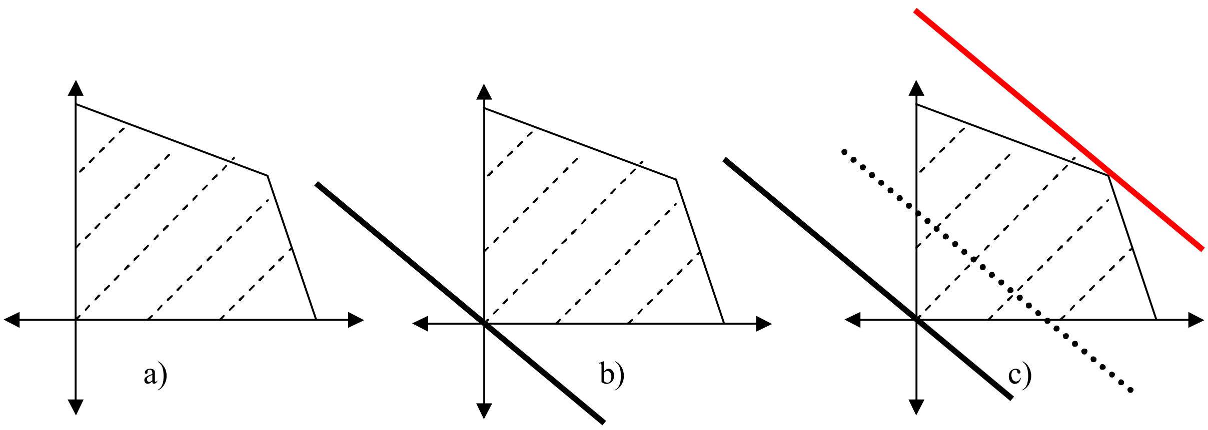
El óptimo que maximiza el beneficio es 320 latas/hora de A y 100 latas/hora de B.

5. Métodos de resolución.

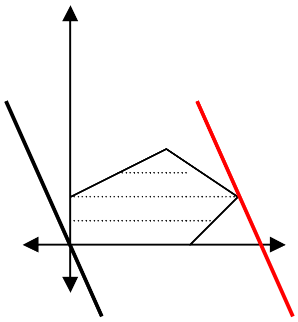
A. MÉTODO GRÁFICO.

Para resolver un problema de programación lineal mediante rectas de nivel obraremos de la siguiente forma:

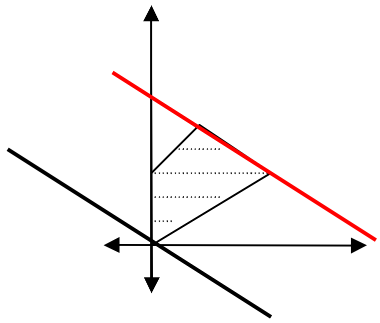
a. Dibujaremos la región factible donde estén las soluciones factibles.
b. Dibujaremos la recta objetivo cero (z=0)
c. Hacemos las rectas de nivel , rectas paralelas a la recta objetivo cero a lo largo de la frontera de la región factible hasta encontrar una "última" solución factible. (última o primera según el caso)



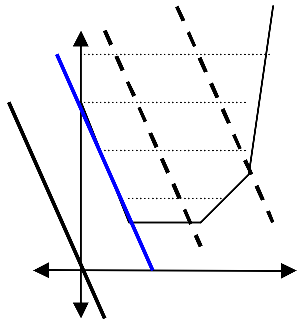
La solución óptima no tiene por que ser única como se ve en estos gráficos:



Un mínimo
Un máximo



un mínimo
infinitos máximos



infinitos mínimos
ningún máximo

B. MÉTODO ANALÍTICO

Sabemos que por el teorema fundamental que si existe una solución única que maximice o minimice una función lineal z=ax+by ésta debe hallarse en uno de los vértices de la región factible, por tanto los puntos críticos son los vértices.

a. Si la región es limitada.
    i. Calculamos los vértices como intersección de rectas.
    ii. Evaluamos la función z en estos puntos.
    iii. Elegimos el óptimo (máximo o mínimo).
    Si en dos vértices obtenemos el mismo valor máximo o mínimo, esto quiere decir que tenemos infinitas soluciones, nos sirve cualquiera de los valores asociados al segmento que une ambos vértices.

b. Si la región es ilimitada.
    Realizaremos un estudio para ver si existe solución óptima o no.
    En caso afirmativo actuamos como en el caso anterior.

C. MÉTODO COMBINADO

Se trata de utilizar ambos métodos en el mismo proceso de resolución. Inicialmente comenzamos con el método gráfico y acotamos las posibles soluciones y luego nos apoyamos en el analítico, ya que gráficamente se pueden cometer grandes errores.

<u>Ejemplo 2</u>

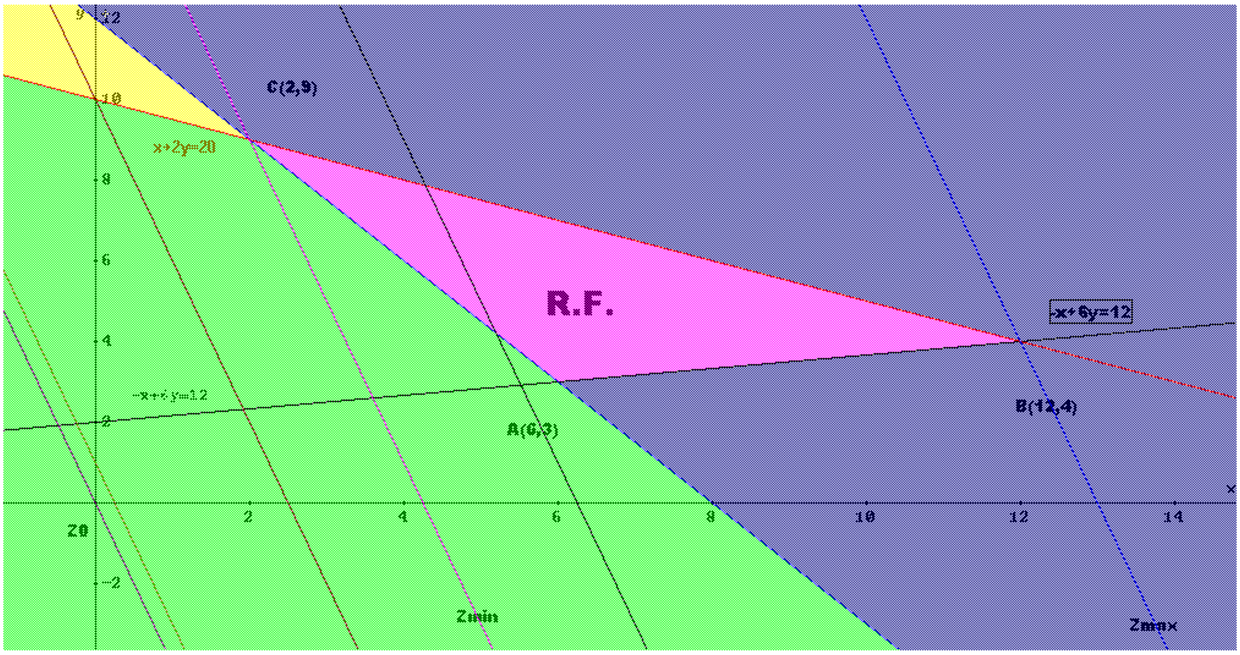
Sea la función z=y+4x. Hallar el máximo y el mínimo en el conjunto definido por:

$$\begin{cases} -x+6y \geq 12 \\ x+2y \leq 20 \\ 3x+2y \geq 24 \end{cases}$$

función objetivo: z=y+4x

$$restricciones: \begin{cases} -x+6y \geq 12 \\ x+2y \leq 20 \\ 3x+2y \geq 24 \end{cases}$$

1.- Calculamos la región factible:



2.- Gráficamente

Fijándonos en la gráfica hemos trazado la recta objetivo cero z_0 y las rectas de nivel y vemos que el mínimo de z está en el punto C y el máximo en B.

3.- Analíticamente

La región factible es limitada entonces las soluciones optimas se encuentran en los vértices.

Calculamos los vértices de la región factible como intersección de rectas

$$A = \begin{cases} -x+6y=12 \\ 3x+2y=24 \end{cases} \Rightarrow A(6,3)$$

Evaluamos la función z en los vértices

$$z(6,3) = 3+4\cdot 6 = 27$$

$$B=\begin{cases}x+2y=20\\-x+6y=12\end{cases}\Rightarrow B(12,4) \qquad z(12,4)=52$$

$$C=\begin{cases}3x+2y=24\\x+2y=20\end{cases}\Rightarrow C(2,9) \qquad z(2,9)=17$$

Por tanto el mínimo se alcanza en C. es decir para x=2 e y=9 y el valor mínimo de la función z es 17; y el máximo en B, es decir para x=12 e y=4 y el valor máximo que alcanza la función z es 52

<u>En resumen</u>

La programación lineal tiene una finalidad fundamentalmente práctica: encontrar la solución óptima (máximo beneficio, mínimo coste, etc.) en problemas en los que, como ocurre en la realidad, nuestros recursos están limitados (estas limitaciones se representan matemáticamente mediante las inecuaciones).

Primeramente es necesario pasar el enunciado literal del problema a su formulación matemática:

- ¿Qué es lo que queremos maximizar o minimizar?

La respuesta a esta pregunta nos conducirá a la función objetivo.

- ¿Qué limitaciones o restricciones tenemos?

Cada limitación hemos de intentar formularla como una inecuación. (Será más fácil si ordenamos los datos en forma de tabla). Una vez planteado el problema, el segundo paso es aplicar el método de resolución:

- A partir de las inecuaciones determinar y dibujar la región factible.

- Calcular las coordenadas de sus vértices.

- Determinar la solución o soluciones óptimas, si existen, sustituyendo las coordenadas de los vértices en la función objetivo y hallando el valor máximo o mínimo, o representando gráficamente las rectas de nivel.