MATRICES

1. Introducción. Definición de matriz

El concepto de matriz como una tabla ordenada de números escritos en filas y columnas es muy antiguo, pero fue en el siglo XIX cuando J.J. Sylverster (1814-1897) acuñó el término de matriz y Arthur Carley (1821-1895) sentó las bases del cálculo matricial.

Definición. Se denomina **matriz** de dimensión mxn a todo conjunto de elementos colocados en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada se escribe $A=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$ o simplemente $A=\left(a_{ij}\right)$.

a_{ij} representa el elemento de la matriz situado en la i-ésima fila y j-ésima columna.

Ejemplo.

$A=\left(a_{ij}\right)_{2x3}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ dimensión=2x3; a_{13}=-1

Al conjunto formado por todas las matrices de m filas y n columnas se le denota por M_{mxn}.

2. Igualdad de matrices. Tipos de matrices

2.1 Igualdad de matrices

Dos matrices $A=(a_{ij})\in M_{mxn}$ y $B=(b_{ij})\in M_{pxq}$ se dicen que son iguales si tienen la misma dimensión (m=p y n=q) y son iguales todos los elementos que ocupan igual posición

2.2 Tipos de matrices

2.2.1 Matriz fila. Matriz columna.

Una matriz fila es una matriz de dimensión 1xn $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n}\end{pmatrix}$, también se denomina vector fila.

Ejemplo: A=(1 3 4)

Una matriz columna es una matriz de dimensión nx1 $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ..... \\ a_{n1}\end{pmatrix}$.

2.2.2 Matriz escalonada

Una matriz se dice que es escalonada cuando el primer elemento no nulo de cada fila está “ más a la derecha “ que el primer elemento no nulo de la fila anterior.

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

2.2.3 Matriz cuadrada

Es una matriz que tiene igual número de filas que de columnas i.e. $A\in M_{nxn}$. En este caso se dice que la matriz es de orden n.

Ejemplo: $A\in M_{3x3}$ $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Toda matriz que no es cuadrada se llama rectangular.

En una matriz cuadrada $A \in M_{nxn}$ se distinguen la diagonal principal que es la formada por los elementos $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}$ y la diagonal secundaria que es la otra diagonal, $a_{n1}, a_{n-1\,2}, ..., a_{1n}$

2.2.4 Matriz triangular

- Matriz triangular superior. Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos por debajo de la diagonal principal.

  $A \in M_{nxn}$ triangular superior $\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i > j \quad \wedge \ \exists a_{ii} \neq 0$

- Matriz triangular inferior. Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos por encima de la diagonal principal.

  $A \in M_{nxn}$ triangular inferior $\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i < j \quad \wedge \ \exists a_{ii} \neq 0$

<u>Ejemplo</u>: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ Triangular superior $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 8 & 23 \end{pmatrix}$ Triangular inferior

En particular una matriz triangular superior sin ceros en la diagonal principal es escalonada.

2.2.5 Matriz diagonal

- Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos salvo los de la diagonal principal.

  $A \in M_{nxn}$ diagonal $\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \quad \wedge \ \exists a_{ii} \neq 0$

<u>Ejemplo</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

- Cuando en una matriz diagonal todos los elementos no nulos son iguales, se denomina **matriz escalar**.

$A \in M_{nxn}$ escalar $\Leftrightarrow a_{ii} = k \;\; \forall i = 1,..,n \;\wedge\; a_{ij} = 0 \;\; \forall i \neq j$

Ejemplo: $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

- Un caso particular de matriz escalar es la **matriz identidad** que es una matriz escalar con todo unos en la diagonal principal. Se denota por I_n (identidad de orden n)

$I_n \in M_{nxn}$ identidad $\Leftrightarrow \;\; a_{ii} = 1 \;\; \forall i = 1,..,n \;\wedge\; a_{ij} = 0 \;\; \forall i \neq j$

Ejemplo: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.2.6 Matriz nula

Es una matriz que tiene todos sus elementos nulos. Se representa por O.

$$O \in M_{nxn} \text{ escalar} \Leftrightarrow \;\; a_{ij} = 0 \;\; \forall i, j = 1,..,n$$

Ejemplo: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.2.7 Matriz opuesta de otra matriz

Dada una matriz $A \in M_{mxn}$ se llama matriz opuesta de A y se denota por –A, a la matriz formada por los elementos opuestos de A respetando sus correspondientes lugares.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

3. Operaciones con matrices

3.1 Suma de matrices

3.1.1 Definición:

Dadas las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$de la misma dimensión mxn, la suma de A y B es otra matriz de dimensión mxn cuyos elementos se obtienen sumando los elementos que ocupan el mismo lugar

$$Sean\ A \in M_{mxn}\ y\ B \in M_{mxn}\quad A + B = S \Leftrightarrow S \in M_{mxn}\ y\ s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\quad \forall i = 1,\ldots,m\ \forall j = 1,\ldots,n$$

3.1.2 Propiedades

Sean las matrices $A \in M_{mxn}$, $B \in M_{mxn}$ y $C \in M_{mxn}$

1) Asociativa: A+(B+C)=(A+B)+C
2) Elemento neutro A+O=A O=matriz nula
3) Elemento opuesto A+(-A)=O -A=matriz opuesta
4) Conmutativa A+B=B+A

Ejercicio:

Determinar el valor de a, b, c, d, e y f en la siguiente operación

$$\begin{pmatrix} 2 & a & -3 \\ b & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & c \\ 3 & 8 & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 3 & 8 \\ 12 & f & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez determinados los valores de las letras hallar la diferencia de las dos primeras matrices.

3.2 Producto de un escalar por una matriz

3.2.1 Definición

El producto de un escalar $k \in R$ por una matriz $A \in M_{mxn}$ es otra matriz kA de igual dimensión que A $\left(kA \in M_{mxn}\right)$ y cuyos elementos se obtienen de multiplicar k por cada uno de los elementos de la matriz A. $k\left(a_{ij}\right)=\left(ka_{ij}\right) \ \forall i=1,....,m \ \forall j=1,...,n$

Ejemplo:

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 \\ 21 & 24 & 12 \end{pmatrix}$

3.2.2 Propiedades

1) Distributiva respecto a la suma de matrices k(A+B)=kA+kB
2) Distributiva respecto a la suma de números reales (k+t)A=kA+tA
3) Asociativa mixta (k.t)A=k(tA)
4) Elemento neutro 1.A=A

Ejercicios:

1.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 5 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ calcular A+B; A-B; 2A+·3B

2.- Hallar la matriz A que satisface: $3\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}+A$ Sol $A=\begin{pmatrix} 2 & 15 & 14 \\ 8 & 17 & 9 \end{pmatrix}$

3.- Determinar las matrices X e Y si cumplen:

2X+Y=$\begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

3X+2Y=$\begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$

Sol: $X=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$

3.3 Multiplicación de matrices

El producto de dos matrices $A=(a_{ij})$ de dimensión mxn y $B=(b_{ij})$ de dimensión nxp es otra matriz $C=(c_{i,j})$ de dimensión mxp cuyo elemento c_{ij} resulta de multiplicar escalarmente el vector fila i-ésimo de A por el vector columna j-ésimo de B

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{im}b_{mj}=\sum_{q=1}^{m}a_{iq}b_{qj}$$

Obsérvese que en general dos matrices A yB cualesquiera no se pueden multiplicar. Es condición indispensable para poder hacerlo que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B.

Ejemplo:

$$\underset{2x4}{\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&2\end{pmatrix}}\cdot\underset{4x3}{\begin{pmatrix}4&2&3\\3&1&0\\6&-2&0\\1&2&2\end{pmatrix}}=\underset{2x3}{\begin{pmatrix}0&8&7\\11&3&4\end{pmatrix}}$$

3.3.1 Propiedades

1) No es conmutativo $A\cdot B\neq B\cdot A$

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\quad A\cdot B=\begin{pmatrix}2&4\\1&7\end{pmatrix}\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&8\end{pmatrix}$$

Dado que el producto no es conmutativo hay que indicar el orden en que se van a multiplicar, por ejemplo, A.B indica que A multiplica a B por la izquierda.

En el caso que existan dos matrices A y B tal que A.B=B.A se dicen que A y B **conmutan**.

2) Si A.B=0 esto no implica necesariamente que A=0 ó B=0.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\-3&-9\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3&6\\-1&-2\end{pmatrix}\quad y\quad A.B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

3) Si $A.C = A.B$ no implica C=B.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 6\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -3 & 6\end{pmatrix}\quad A.B=\begin{pmatrix}5 & -8\\ -10 & 16\end{pmatrix}\quad A.C=\begin{pmatrix}5 & -8\\ -10 & 16\end{pmatrix}$$

$$Luego \quad A.B = A.C \quad y \quad B \neq C$$

4) Asociativa A(BC)=(AB)C

5) Elemento neutro A.I=I.A=A

6) Distributiva A(B+C)=AB+AC

Ejercicios:

1.- Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ calcular A.B, A^2, B^2, $(A+B)^2$

2.- Calcular los valores de x e y que verifican las siguientes igualdades:

a) $\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ sol. *x=0; y=0*

b) $\begin{pmatrix}5 & x\\ y & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x & 2\\ 5 & -y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ *sol. x:=10/t; y=t tЄR*

3.- Calcular todas las matrices que conmutan con la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$sol: B=\begin{pmatrix}d-c & -2c\\ c & d\end{pmatrix}$

4.- Dadas las siguientes matrices, calcular cuando sea posible las operaciones indicadas:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}5 & 6\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -2 & 0 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

a) 2A b) $B+C^t$ c) $A+B^t$ d) A+BC

e) G+BC f) G+CB g) $FB+5D^t$ h) $3C+2B^t$

5.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ hallar a y b para que se verifique la ecuación matricial

A^2+aA+bI=0. sol: a=-1; b=-12

6.- Hallar x,y,u,v para que A.B=0 con $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}x & y\\ 1 & 2\\ u & v\end{pmatrix}$

sol: x=-2; y=-4; u=-1; v=-2

7.- Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 1 & c\end{pmatrix}$ hallar a,b,c para que B conmute con A.

sol: a=t; b=1; c=t-1 *t€R*

8.- Hallar las matrices que conmutan con $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$sol:\begin{pmatrix}t+2s & s\\ -2s & t\end{pmatrix}\ t\in R$

9.- Sea A una matriz cuadrada tal que A^2=A, si B=2A-I demostrar que B^2=I

4. Trasposición de matrices. Mátriz simétrica y ortogonal

Sea $A\in M_{mxn}$ se llama matriz traspuesta de A, y se designa por A^t a la matriz cuyas columnas son las filas de A (se obtiene permutando las filas por columnas en A).

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\\ 1 & 4\end{pmatrix}\qquad A^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 7 & 4\end{pmatrix}$$

Si $A\in M_{mxn}\Rightarrow A^t\in M_{nxm}$

Propiedades de la matriz traspuesta:

1) $\forall A,B\in M_{mxn}\quad \left(A^t\right)^t=A$

2) $\forall A,B\in M_{mxn}\quad (A+B)^t=A^t+B^t$

3) $\forall A\in M_{mxn}\ \forall k\in R\quad (k.A)^t=kA^t$

4) $\forall A\in M_{mxn}\ \ B\in M_{nxm}\quad (A.B)^t=B^t.A^t$

La trasposición de matrices permiten definir tres nuevos tipos de matrices: simétricas, antisimétricas y ortogonal.

- $\forall A \in M_{nxn}$ **A es simétrica** $\Leftrightarrow$ A=A^t (simétrica respecto a la diagonal principal)

  Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

- $\forall A \in M_{nxn}$ **A es antisimétrica** $\Leftrightarrow$ A=-A^t

  Por su forma se reconocen por que tienen opuestos los elementos simétricos respecto de la diagonal principal y nulos los elementos de esta.

  Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$\forall A \in M_{nxn}$ **A es ortogonal** $\Leftrightarrow$ $A.A^t=I$ ($A^t=A^{-1}$)

Ejercicios

1.- Demostrar que el producto de dos matrices ortogonales es un matriz ortogonal.

2.- Si A es antisimétrica demostrar que A^3 y A^5 son antisimétricas.

3.- Si A es antisimetrica demostrar que A^2 y A^4 son simétricas

5. Matriz inversa

Dada una matriz $A \in M_{nxn}$ (cuadrada) diremos que A^{-1} es su inversa si se verifica que $A.A^{-1}=A^{-1}A=I$.

No todas las matrices cuadradas tienen inversa. Cuando una matriz tiene inversa la denominamos **regular** o **inversible**; en caso contrario decimos que es **singular**.

5.1 Propiedades

1) El producto de matrices regulares es regular y además $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2) La matriz inversa si existe es única.

3) $(A^{-1})^{-1} = A$

4) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

5.2 Cálculo de la matriz inversa

Existen tres posibilidades: por la definición, por el método de Gauss-Jordan y por adjuntos.

5.2.1 Por la definición

Vamos a verlo mediante un ejemplo.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - t = 0 \\ y + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1/3 & y = 1/3 \\ z = -1/3 & t = 2/3 \end{matrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Este proceso es ya engorroso para matrices de dimensión 2x2, y se complica mucho más si aumentamos la dimensión.

Veamos otra forma de calcular la inversa.

5.2.2 Método de Gauss-Jordan

La inversa de una matriz regular A se calcula transformando la matriz (A/I) mediante operaciones elementales de las filas en la matriz (I/A^{-1}).

Se denominan operaciones elementales por filas en una matriz a las siguientes:

I. Intercambiar filas. Lo designaremos por $F_i \leftrightarrow F_j$

II. Multiplicar una fila por un número $k \neq 0$. Lo designaremos por $F_i \to kF_i$

III. Sumar a una fila otra fila multiplicada por un número $k \neq 0$. Lo designaremos por $F_i \to F_i + kF_j$.

Vamos a ejemplarizar este proceso calculando la matriz inversa de

Ejemplo 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Al elemento a_{11} se le denomina pivote y es recomendable que sea 1.

i) Planteados la matriz (A/I) $\Rightarrow$ $(A/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

ii) Con la 1ª fila se hacen ceros a los primeros elementos del resto de las filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

iii) Con la segunda fila hacemos ceros a los segundos elementos de las filas siguientes:

Ahora el pivote es a_{22}

$$\xrightarrow{F_3+4F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

En el caso de que existiesen más filas, se procede así hasta tener todo ceros por debajo de la diagonal principal.

iv) Se repite el mismo proceso pero a la inversa; es decir, hasta conseguir ceros por encima de la diagonal principal

$$\xrightarrow{F_1-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&3&-4&-1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-2&4&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1-2F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-6&-1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-2&4&1\end{array}\right)=\left(I/A^{-1}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-6&-1\\0&1&0\\-2&4&1\end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\-4&1&-1\\2&0&1\end{pmatrix}$$

En este caso el pivote es 3, haremos que sea 1.

i) Planteados la matriz (A/I) $\Rightarrow$ $(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&-2&-1&1&0&0\\-4&1&-1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)$

ii) Hacemos que el pivote sea 1 y con la 1ª fila se hacen ceros a los primeros elementos del resto de las filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&-2&-1&1&0&0\\-4&1&-1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&0&-1\\-4&1&-1&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2+4F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&0&-1\\0&-7&-9&4&1&-4\\0&4&5&-2&0&3\end{array}\right)$$

iii) Ahora el pivote es el -7, como no es fácil convertirlo en 1, sin utilizar fracciones, hacemos lo siguiente para hacer ceros a los segundos elementos de las filas siguientes:

$$\xrightarrow{7F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&0&-1\\0&-7&-9&4&1&-4\\0&28&35&-14&0&21\end{array}\right)\xrightarrow{F_3+4F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&0&-1\\0&-7&-9&4&1&-4\\0&0&-1&2&4&5\end{array}\right)\xrightarrow{-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&1&0&-1\\0&-7&-9&4&1&-4\\0&0&1&-2&-4&-5\end{array}\right)$$

se procede así hasta tener todo ceros por debajo de la diagonal principal.

iv) Se repite el mismo proceso pero a la inversa; es decir, hasta conseguir ceros por encima de la diagonal principal

$$\xrightarrow[F_1+2F_3]{F_2+9F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 0 & -3 & -8 & -11\\ 0 & -7 & 0 & -14 & -35 & -49\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -5\end{array}\right)\xrightarrow{F_2/(-7)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 0 & -3 & -8 & -11\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1+2F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -5\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}$$

Ejemplo 3: Calcular la inversa de $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

$$(A/I)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1+F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2+2F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{-F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & -3\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

5.2.3 Adjuntos.

Este apartado lo veremos cuando estudiemos los determinantes.

<u>Ejercicios</u>:

Hallar la matriz inversa de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Sol. $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 3 & 3 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

6. Rango de una matriz

Nota: conociendo solamente el método de Gauss-Jordan.

Conocimientos previos: Combinación lineal de vectores

Considerando que las filas y columnas de una matriz son a todos los efectos vectores, hacemos la siguiente definición: " un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}$ si se puede expresar como $\vec{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + ... + \lambda_n \overrightarrow{v_n}$ con $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$ alguno no nulo. Entonces se dice que el conjunto formado por los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}$ son linealmente independiente (L.D.) (sistema ligado).

En caso contrario se llaman linealmente independientes (L.I.)

Aplicando esto a la notación de matrices.

Un conjunto de filas $F, F_1, F_2, ..., F_n$ es L.D. si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$ no todos nulos tal que $F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + ... + \lambda_n F_n$ i.e. si una de ellas se puede poner como combinación lineal de las demás.

La definición es similar utilizando columnas.

A partir de ahora cuando vayamos a definir o aplicar un concepto que es equivalente para filas y columnas, utilizaremos el término línea para referirnos indistintamente a fila o columna.

Ejemplos:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ en esta matriz $F_3=2F_1+F_2$, por tanto F_1, F_2, F_3 son L.D. i.e. F_3

Es combinación lineal de F_1 y F_2.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C_3=2C_1$ => C_3 es proporcional a C_1 i.e. C_3 es combinación lineal de C_1.

6.1 Rango de una matriz

Definición: El **rango** o característica de una matriz es el número de filas o columnas (líneas) linealmente independientes.

$$Sea\ A \in M_{m,n} \Rightarrow\ ran(A) = ran\left(F_1,\dots,F_m\right) = ran\left(C_1,\dots,C_n\right)$$

Existe un teorema que nos dice que en una matriz el número de filas L.I. es igual al número de columnas L.I., esto nos permite fijarnos únicamente en uno de los dos.

Existe una relación directa entre el rango de una matriz y la existencia de su inversa:

" Una matriz cuadrada de orden n $A \in M_{n,n}$ tiene inversa siempre y cuando su rango sea n"

$$A \in M_{n,n},\ \ \exists A^{-1} \Leftrightarrow\ \ ran(A) = n$$

Ejemplo.

Sea la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ calcular su rango.

Primero observamos si existe alguna relación entre sus líneas. A simple vista no se ve ninguna.

Entonces procedemos a comprobarlo por la definición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = \beta \Leftrightarrow \beta = 1 \\ 2 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1 \\ -2 = \lambda + 3\beta \ con\ los\ valores\ de \lambda\ y\ \beta\ anteriores\ -2 \neq 1 + 3\cdot 1 \end{array}\right. \Rightarrow sistema\ incompatible$$

=> no existe ningún valor de λ, β no nulo que verifique igualdad

=> son L.I. y por tanto ran(B)=3.

(*Nota:* $B \in M_{3,3}$ *y ran(B)=3 quiere decir que B es regular i.e.* $\exists\ B^{-1}$)

Este método es un tanto laborioso.

Veamos otro método para calcular el rango de una matriz

6.2 Método de Gauss-Jordan para el cálculo del rango

Este método ya se ha utilizado para el cálculo de la matriz inversa, ahora lo utilizaremos para calcular el rango de una matriz.

Para los siguientes resultados consideramos una "línea" tanto a una fila como a una columna.

Tengamos en cuenta que a la hora de calcular el rango de una matriz, éste no varía si:

1) Se realizan transformaciones elementales con las "líneas". Recordemos las transformaciones elementales:
    a) Intercambiar "líneas".
    b) Multiplicar una "línea" por un número no nulo.
    c) Sumar a una "línea" otra multiplicada por un número no nulo.
2) Se suprime una "línea" nula.
3) Se suprime una "línea" proporcional a otra.
4) Se suprime una "línea" que es combinación lineal de otras.
5) Se traspone la matriz.

El método de Gauss-Jordan, consiste en reducir una matriz a su forma escalonada realizando trasformaciones elementales que sabemos no modifican el rango.

Un método general consiste en hacer ceros por debajo de la hipotética "diagonal principal". Obteniendo así una matriz escalonada. Si en esta matriz escalonada eliminamos las "líneas" no nulas "es evidente" que el número de "líneas" no nulas que quedan son L.I. Por tanto en una matriz escalonada su rango coincide con el menor número de "líneas" no nulas que tiene.

<u>Importante</u>: El rango de un matriz es igual al menor número de "líneas" no nulas que quedan al reducirla a una matriz escalonada

Ejemplos :

1.- $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+2F_2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow ran(A)=2$

Si nos hubiésemos fijado $F_3=3F_1-2F_2$ o $C_3=C_1-C_2$.

2.- $B=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\\2&4\\4&1\end{pmatrix}$ dado que $B\in M_{4x2}\Rightarrow ran(B)\le 2$

$$B=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\\2&4\\4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_3-2F_1\\F_4-4F_1}]{F_2+2F_1}\begin{pmatrix}1&2\\0&7\\0&0\\0&-7\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2\\0&7\\0&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+F_2}\begin{pmatrix}1&2\\0&7\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow ran(B)=2$$

3.- $C=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&9\\-3&-6&-9&1\end{pmatrix}$ $C\in M_{3x4}\Rightarrow ran(C)\le 3$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&9\\-3&-6&-9&1\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3+3F_1]{F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&1\\0&0&0&13\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-13F_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow ran(C)=2$$

($C_2=2C_1$; $C_3=3C_1$)

El método a seguir es similar al utilizado para el cálculo de la matriz inversa, pero en el caso de la matriz inversa solo se pueden realizar transformaciones elementales con las filas y, para calcular el rango se pueden utilizar también las columnas (pues mantienen invariantes el rango).

4.- Calcular el rango de $D=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&3\\5&-1&k\end{pmatrix}$ según los valores de "k".

$$D=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&3\\5&-1&k\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3-5F_1]{F_2-F_1}\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&3&2\\0&9&k-5\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-3F_2}\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&3&2\\0&0&k-11\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}si\ k=11\Rightarrow ran(D)=2\\si\ k\ne 11\Rightarrow ran(D)=3\end{matrix}$$

Nota: siempre que tengamos parámetros lo mejor, si es posible, es colocarlos lo más a la derecha y bajo de la matriz.

5.- Estudiar para que valore de "m" la matriz $E=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&m\\m&2&-1\end{pmatrix}$ tiene inversa.

$$E=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&m\\m&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[C_1/2]{C_2\leftrightarrow C_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&m&2\\1&-1&m\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&m+2&0\\0&0&m-1\end{pmatrix}$$

⊙ $si\ m=-2\ \Rightarrow ran(E)=2$

⊙ $si\ m=1\ ran(E)=2$

⊙ $si\ m\neq-2\wedge m\neq1\ \Rightarrow ran(E)=3=n\ \Leftrightarrow \exists\ E^{-1}$

6.- Calcular el rango de $F=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\a&1&1&1\\1&-1&3&-3\\4&2&0&a\end{pmatrix}$ según los valores de "a".

$$F=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\a&1&1&1\\1&-1&3&-3\\4&2&0&a\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\1&a&1&1\\-1&1&3&-3\\2&4&0&a\end{pmatrix}\xrightarrow[F_4-2F_1]{\substack{F_2-F_1\\F_3+F_1}}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&a-1&2&-1\\0&2&2&-1\\0&2&2&a-4\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&2&a-1&-1\\0&2&2&-1\\0&2&2&a-4\end{pmatrix}\xrightarrow[F_4-F_2]{F_3-F_2}\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&2&a-1&-1\\0&0&-a+3&0\\0&0&-a+3&a-3\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\leftrightarrow F_4]{C_3\leftrightarrow C_4}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&2&-1&a-1\\0&0&a-3&-a+3\\0&0&0&-a+3\end{pmatrix}$$

Llegados a este punto los valores críticos son aquellos que evitan que la matriz sea escalonada con "líneas" no nulas i.e. $\begin{matrix}a-3=0\Rightarrow a=3\\-a+3=0\Rightarrow a=3\end{matrix}$

Entonces:

- Si a≠3 => ran(F)=4
- Si a=3 => $F^*=\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&2&-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow ran(F)=2$

Ejercicios:

1.- Determinar el rango de cada una de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 6\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ 6 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 5 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Sol: ran(A)=2, ran(B)=3, ran(C)=2, ran(D)=3, ran(E)=4, ran(F)=3, ran(G)=3, ran(G)=3

2.- Determinar, en función del parámetro λ, el rango de cada una de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 3 & -1\\ 0 & \lambda+1 & 2\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}\lambda & \lambda+3 & 1\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & -6 & 0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & \lambda+3\\ 1 & \lambda & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda & 1 & \lambda-1\\ 1 & \lambda & 1\end{pmatrix}$$

a) $\odot\ si\ \lambda=-1 \Rightarrow ran(A)=2 \quad \odot\ si\ \lambda\neq-1 \Rightarrow ran(A)=3$

b) $\odot\ si\ \lambda=-19/7 \Rightarrow ran(B)=2 \quad \odot\ si\ \lambda\neq-19/7 \Rightarrow ran(B)=3$

c) $\odot\ si\ \lambda=-3 \vee \lambda=1/2 \Rightarrow ran(C)=2 \quad \odot\ si\ \lambda\neq-3 \vee \lambda\neq1/2 \Rightarrow ran(C)=3$

d) $\odot\ si\ \lambda=1 \Rightarrow ran(D)=2 \quad \odot\ si\ \lambda\neq1 \Rightarrow ran(D)=3$

3.- Discutir según los valores de “a” el rango de A con $A=\begin{pmatrix}1 & -a & -1 & 1\\ 2 & 4 & a & 0\\ a+1 & 2 & -1 & 3\\ 3 & 6 & a-1 & -1\end{pmatrix}$