Determinantes

1 Introducción:

Los determinantes históricamente son anteriores a las matrices, pero por el auge de éstos han quedado relegados a un 2º plano.

El uso de los determinantes nos permitirá:

- Calcular la inversa de una matriz
- Determinar el rango de una matriz
- Expresar la solución de un sistema de ecuaciones lineales
- Resolver situaciones diversas de medidas en geometría

2 Determinantes de orden 2 y 3

Dada una matriz cuadrada A de dimensión nxn le podemos asociar un número real que denominaremos determinante de A de orden n y lo denotaremos por det(A) ó $|A|$. La obtención de este número se efectúa a partir de los elementos de la matriz y exige el conocimiento de una reglas cuyo fundamento no es trivial, pero de aplicación relativamente sencilla.

2.1 Orden 2

Sea A una matriz de dimensión 2x2 definimos

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Este resultado se corresponde con la suma de todos los posibles productos de dos elementos que se pueden formar tomando un elemento y solo uno de cada fila y un elemento y solo uno de cada columna afectado cada producto por el signo + ó -, según unas determinadas propiedades (inversión par o impar).

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 7\cdot 1 = 1$

2.2 Orden 3

Sea A una matriz de dimensión 3x3 definimos

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}$$

Regla de Sarrus

Este número también se obtiene realizando todos los productos posibles de 3 factores talque en cada producto entran a formar parte un elemento y solo unos de cada fila y un elemento y solo uno de cada columna afectado cada producto por el signo + ó -, según unas determinadas propiedades (inversión par o impar).

Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=6 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix}=-16 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-15 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4$$

Nota: Por la propia definición de determinante, es evidente, que en el caso de matrices triangulares o diagonales el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal.

"Enseñar a calcularlos de forma práctica añadiendo las dos primeras filas al final ...."

Ejemplo:

Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}=0$

$$\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}=-37x+111=0 \;\Rightarrow\; x=3$$

Ejercicios:

1.- Calcular: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}=(-18)$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 12 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(-18)$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-3$ $\qquad \begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}=(-2)$

2.- Resolver las ecuaciones: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & -2 & 5 \\ x^2 & 4 & 25 \end{vmatrix} = 0 \quad \left(7x^2 - 21x - 70 = 0 \Rightarrow x = -2 \wedge x = 5\right)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \left(x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge x = 1\right)$$

3 Determinantes de orden superior a 3

La aplicación del proceso descrito para el desarrollo de un determinante con la formación de todos los productos posibles, resulta muy laborioso cuando el orden es superior a 3. Un determinante de orden 4 precisa el cálculo de 24 productos de 4 factores cada uno y el de orden 5 necesita 125 productos de 5 factores, ….lo cuál dista mucho de ser cómodo y sí muy propenso a la comisión de errores.

Se puede construir un procedimiento alternativo para el cálculo de estos determinantes, pero es preciso describir previamente los conceptos siguientes:

3.1 Menor Complementario

Sea $A \in M_{nxn}$ se llama menor complementario del elemento a_{ij} de A, y lo representaremos por α_{ij}, al determinante de la matriz cuadrada de orden n-1 que se obtiene de suprimir la fila i-ésima y la columna j-ésima de A.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\text{Menor complementario del } a_{11} = \alpha_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 32$$

$$\text{Menor complementario del } a_{13} = \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -15$$

$$\text{Menor complementario del } a_{32} = \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

3.2 Adjunto de un elemento. Matriz Adjunta

Para una matriz cuadrada $A \in M_{nxn}$ de orden n, se llama adjunto del elemento a_{ij} de A, y lo representamos por A_{ij}, al menor complementario del elemento a_{ij} anteponiéndole el signo + ó – según sea la suma de los subíndices i+j par o impar: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$

Para el ejemplo anterior: $$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1}\alpha_{11} = 32 \\ A_{13} &= (-1)^{1+3}\alpha_{13} = -15 \\ A_{32} &= (-1)^{3+2}\alpha_{32} = -6 \end{aligned}$$

Definición: La matriz cuyos elementos son los adjuntos de los correspondientes elementos de una matriz cuadrada A se llama matriz adjunta de A y se denota por Adj(A).

Para nuestro ejemplo: $$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 18 & -15 \\ -14 & -5 & 8 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo</u>:

Calcular la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Adj(A)}= \begin{pmatrix} A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 & A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 & A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \\ A_{21} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 & A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = 0 & A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = -9 \\ A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = -4 & A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = -8 & A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -9 \\ -4 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora ya estamos en condiciones de poder calcular determinantes de orden superior a 3.

Sea $A \in M_{nxn}$ el valor de su determinante se obtiene sumando los productos de los elementos de una de sus "líneas" por sus adjuntos correspondientes:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \ (desarrollo\ por\ la\ i-ésima\ fila) = \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \ (desarrollo\ por\ la\ j-ésima\ columna) \end{aligned}$$

El valor del determinante es independiente de la "línea" elegida.

Ejemplo:

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = Por\ \ Sarrus = (-2-8) = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = desarrollando\ \ por\ \ la\ \ 2^{a}\ \ fila = 0 + (1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + (-8) = -10$$

Se ha elegido la fila que más ceros tiene para simplificar las operaciones, también se podría haber elegido la primera columna.

Ejemplo:

Resolver $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Elegimos la "línea" que tenga el mayor número de ceros para simplificar las operaciones, en este caso la segunda columna. Y hacemos el desarrollo por esa "línea".

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 2(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{POR\ SARRUS}{=} -2\cdot(-9-12) + 2\cdot(9-7) = 46$$

Proposición: Dada una matriz $A \in M_{nxn}$ se cumple que la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de otra línea paralela es cero.

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad \forall i \neq j$$
$$(desarrollo\ \ por\ \ los\ \ elementos\ \ de\ \ la\ \ i-ésima\ \ fila\ \ con\ \ los\ \ adjuntos\ de\ \ j-ésima\ \ fila)$$

Esta proposición nos permitirá más adelante construir la matriz inversa.

4 Propiedades de los determinantes

4.1 $|A| = |A^t|$

4.2 $$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+y & a_{13}+z \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4.3 ***Si multiplicamos todos los elementos de una línea de un determinante, el determinante queda multiplicado por dicho número.*** $\begin{vmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & Ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = K\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

4.4 ***El determinante de un producto es el producto de los determinantes.*** $|A.B| = |A|.|B|$

4.5 ***Si en un determinante permutamos dos líneas el determinante cambia de signo.***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4.6 ***Si un determinante tiene una línea de ceros vale cero.***

4.7 ***Si un determinante tiene dos líneas iguales vale cero.***

4.8 ***Si un determinante tiene dos líneas proporcionales vale cero.***

4.9 ***Si un determinante tiene una línea combinación lineal de las restantes vale cero.***

4.10 ***Si en un determinante a una línea se le suma otra paralela su valor no cambia.***

4.11 ***Si en un determinante a una línea se le suma otra paralela multiplicada por un número su valor no cambia***

4.12 $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

4.13 ***El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal.***

Ejemplo:

1.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcular el valor de los siguientes determinantes, sin desarrollarlos:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5y & 5x & 5z \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

Sol: a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5y & 5x & 5z \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} -\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5\dfrac{1}{5}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}}_{=0\ (F_2=2F_1)} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}}_{=0\ (F_3=F_1)} = 1$

2.- Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante es múltiplo de 15: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

Sol: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} \overset{C_3+10C_2+100C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 150 \\ 2 & 2 & 225 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & 15 \\ 2 & 5 & 17 \end{vmatrix}$

3.- Demostrar, sin desarrollar, que $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

Sol: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+a+c \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$

5 Métodos prácticos para el cálculo de determinantes de grado superior a 3

5.1 Método CHIO

"Utilizando las propiedades de los determinantes se trata de hacer ceros a todos los elementos de una línea para luego desarrollarlo por los adjuntos de esa línea"

Ejemplo: $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{F_4-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Desarrollando por } C_2}{=} 2.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_3}{=} 2.\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{F_3+F_1}{\overset{F_2-2F_1}{=}}$$

$$= 2.\begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Desarrollando por } C_1}{=} 2.\begin{vmatrix} 11 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2(11-(-12)) = 2.23 = 46$$

5.2 Método de GAUSS

"Utilizando las propiedades de los determinantes se trata de conseguir un determinante triangular (superior o inferior) de tal manera que su determinante sea el producto de los elementos de la diagonal"

Ejemplo 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_3-F_1}{\overset{F_2+F_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \overset{2F_3}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} \overset{F_3-F_2}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.1.4(-11) = -22$$

Ejemplo 2:

Calcular el determinante: $$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3+C_4}{=} \begin{vmatrix} 3x+3 & x & x & x \\ 3x+3 & 3 & x & x \\ 3x+3 & x & 3 & x \\ 3x+3 & x & x & 3 \end{vmatrix} = (3x+3)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{F_4-F_1}{\overset{F_2-F_1,\ F_3-F_1}{=}} (3x+3)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3x+3)(3-x)^3$$

6 Cálculo del rango de una matriz

Recordemos que el rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes.

Además sabemos que el número de filas L.I. es igual al número de columnas L.I.

Existen fundamentalmente dos métodos para realizarlo: Método de Gauss, Método del Orlado

6.1 Método de Gauss

Ya lo hemos visto.

6.2 Cálculo por determinantes. Método del Orlado

Introducción: Consideramos una matriz $A \in M_{mxn}$, supongamos que m≤n (esta restricción no resta generalidad), si tomamos todos los determinantes de las submatrices de orden m (menores de orden m) y vemos que se anulan, podemos deducir que a la fuerza existe una combinación lineal entre sus filas o bien sus columnas.

Dando la vuelta a esta deducción podemos decir que si una matriz $A \in M_{mxn}$ (m≤n) existe algún determinante de orden m no nulo, todas las filas y columnas son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ ran(A)=m.

Definición: Sea $A \in M_{mxn}$ si en esta matriz se prescinde de una o varias filas o columnas de forma que quede una matriz cuadrada de pxp, el determinante correspondiente se llama menor de la matriz A de orden p.

Definición: Sea $A \in M_{mxn}$ se dice que el **rango de A,** ran(A), es K, si existe por lo menos un menor de orden K no nulo siendo nulos todos los menores de orden superior a K.

(El orden del mayor menor no nulo da el rango de la matriz)

A partir de aquí vamos a ver el método práctico del Orlado para el cálculo de rangos.

Definición: Sea $A \in M_{mxn}$ y elegido en ella un menor de orden K, se entenderá por *orlar* dicho menor, al formar otro menor de orden K+1 añadiendo al primero los elementos de una fila y una columna que no formen parte del menor dado.

Se puede demostrar que “si orlando un menor de orden K distinto de cero todos los determinantes de orden K+1 que se pueden formar son nulos entonces cualquier otro menor de orden superior a K es también nulo, y por lo tanto el rango de A es K”

Nota importante: según lo anteriormente expuesto si tenemos una matriz cuadrada de orden n, tal-que su determinante sea no nulo entonces su rango es n.

En la práctica para calcular el rango de una matriz se busca un menor de orden 2 no nulo. Se elige una columna y se orla con las filas restantes:

- Si todos los orlados son nulos se suprime la columna y se repite la operación con otra columna.
- Si hay un orlado no nulo comenzamos de nuevo y lo orlamos igual que el anterior.

El proceso termina cuando no quedan columnas.

Ejemplos:

1.- Calcular el rango de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como es una matriz cuadrada primero calcularemos su determinante para ver si su rango es 4. Vemos que $|A|=0$ por tanto su $\operatorname{ran}(A)\neq 4$.

Seguidamente consideramos un menor de orden 2 no nulo por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$

Orlamos por la siguiente columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}=0 \text{ cambiamos de fila } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow ran(A)\geq 3 \;\; y\ como\ |A|=0 \Rightarrow ran(A)=3$$

2.- Calcular el rango, dependiendo de los diferentes valores de “a”, de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$

Como es una matriz cuadrada primero hacemos su determinante, haciendo ceros en la primera columna:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{vmatrix} \underset{=}{C_1\leftrightarrow C_2} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & a \end{vmatrix} \underset{f_4-2f_1}{\overset{\substack{f_2-f_1\\ f_3+f_1}}{=}} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a-1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & a-4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a-1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & a-4 \end{vmatrix} = -2(a-3)^2$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow a = 3$ Luego

- Si $a \neq 3 \Rightarrow$ ran(A)=4

- Si a=3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ tomamos un menor de orden 2 no nulo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ lo orlamos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

por tanto todos los menores de orden 3 son nulos $\Rightarrow$ ran(A)=2.

Ejercicios:

1- Discutir en función del parámetro el rango de

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 2 \\ 2 & b & b^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k^2 \end{pmatrix}$

Sol: a) $|A| = 11k^2 - k - 12$ $si\ k \neq -1\ y\ k \neq 12/11 \Rightarrow ranA = 3$ $en\ caso\ contrario\ ranA = 2$ si k b)
$si\ a = 3 \Rightarrow ran(B) = 2$ $si\ a \neq 3 \Rightarrow ran(B) = 3$ c) $si\ b \neq 1 \Rightarrow ran(C) = 3$ $si\ b = 1\ ran(C) = 2$ d) $si\ k \neq 1 \Rightarrow Rg(D) = 3$ $si\ k = 1 \Rightarrow Rg(D) = 1$

7 Cálculo de la matriz inversa.

Recordemos que la matriz inversa de una matriz regular A es otra matriz del mismo orden tal que :

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

siendo I la matriz identidad del mismo orden que la matriz A.

Ya hemos visto que la matriz inversa se podía calcular de tres maneras: por la definición, por Gauss-Jordan y por adjuntos.

Las dos primeras formas ya las conocemos, vamos a desarrollar la tercera.

Teorema: Una matriz cuadrada de orden n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$, y su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{|A|} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & .... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & .... & A_{n2} \\ .... & .... & .... & .... \\ A_{1n} & A_{2n} & .... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Demostración:

Hacemos $A.(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \sum a_{1j}A_{1j} & \sum a_{1j}A_{2j} & \dots & \sum a_{1j}A_{nj} \\ \sum a_{2j}A_{1j} & \sum a_{2j}A_{2j} & \dots & \sum a_{2j}A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum a_{nj}A_{1j} & \sum a_{nj}A_{2j} & \dots & \sum a_{nj}A_{nj} \end{pmatrix} =$ teniendo en cuenta las dos siguientes proposiciones que ya hemos visto anteriormente,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \, (desarrollo\ por\ la\ i-ésima\ fila)$$

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} \quad \forall i \neq j \quad = \sum_{i \neq j} a_{ij}A_{ij} = 0$$

$(desarrollo\ por\ los\ elementos\ de\ la\ i-ésima\ fila\ con\ los\ adjuntos\ de\ j-ésima\ fila)$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A|\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot I$$

tenemos: $A\left(Adj\left(A\right)\right)^t = |A| \cdot I \Rightarrow A.\frac{\left(Adj\left(A\right)\right)^t}{|A|} = I$ dado que $A.A^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|}$.

<u>Ejemplo:</u>

1.- Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Primero tenemos que hallar $|A|$ para ver si es inversible o no:

$|A| = 2 \neq 0 \Rightarrow$ A inversible o regular.

Calculamos Adj(A)

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4$ $\quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último: $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 & -1/2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

2.- Dadas las matrices: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial

BX+3C=C(B+3I).

Lo primero que hay que hacer para resolver ecuaciones matriciales es despejar la matriz incógnita.

BX=CB+3CI-3C $\Rightarrow$ BX=CB $\Rightarrow$ $B^{-1}BX=B^{-1}CB$.

Ahora calculamos B^{-1} $|B| = 1 \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ llevándola a la ecuación:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & 6 & 10 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Ejercicios:

1.- Calcular la inversa de las siguientes matrices:

$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{9} & -\frac{5}{9}\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ 0 & -4 & 2\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $C^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{35} & -\frac{1}{35} & \frac{9}{35}\\ \frac{3}{35} & -\frac{8}{35} & \frac{2}{35}\\ \frac{6}{35} & \frac{3}{70} & \frac{4}{35}\end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ $D^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$E=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $E^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$F=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$ $F^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{20}{3} & -\frac{17}{3} & \frac{8}{3}\\ \frac{14}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{5}{3}\end{pmatrix}$

2.- Hallar para los valores de “a” que lo hagan posible la matriz inversa de : $G=\begin{pmatrix}0 & 7 & 5\\ 3 & 4 & a\\ 7 & 0 & 5\end{pmatrix}$ y calcular su inversa

Sol.: $G^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{20}{49(a-5)} & \frac{5}{7(5-a)} & \frac{7a-20}{49(a-5)}\\ \frac{7a-15}{49(a-5)} & \frac{5}{7(5-a)} & \frac{15}{49(a-5)}\\ \frac{4}{7(5-a)} & \frac{1}{a-5} & \frac{3}{7(5-a)}\end{pmatrix}$

3.- Averiguar para que valores de “a” la matriz $H=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & a & 3\\ 4 & 1 & -a\end{pmatrix}$ tiene inversa. Calcularla para a=2.

Sol: $\exists H^{-1}$ $para\ a\neq 1 \wedge a\neq 3$ para a=2 $H^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2\end{pmatrix}$

4.- Hallar la inversa de $M=\begin{pmatrix}1 & a & -3\\ -1 & 2 & -a\\ -1 & 7 & -7\end{pmatrix}$

Sol: $M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7(a-2)}{a^2+1} & \frac{7(a-3)}{a^2+1} & \frac{6-a^2}{a^2+1}\\ \frac{a-7}{a^2+1} & -\frac{10}{a^2+1} & \frac{a+3}{a^2+1}\\ -\frac{5}{a^2+1} & -\frac{a+7}{a^2+1} & \frac{a+2}{a^2+1}\end{pmatrix}$

5.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ calcular $B=A^{-1}-2A$

Sol: $B=\begin{pmatrix}-\frac{13}{4} & -\frac{9}{4}\\ -\frac{9}{2} & \frac{11}{2}\end{pmatrix}$

6.- Resolver: $X\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

Sol: no tiene sol.,

7.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 6 & 3 & 0\end{pmatrix}$ resolver AB-2X=3D.

Sol: $X=\begin{pmatrix}-4 & -6 & \frac{7}{2}\\ -2 & -3 & \frac{1}{2}\\ -\frac{21}{2} & -3 & \frac{7}{2}\end{pmatrix}$

8.- Encontrar una matriz X que verifique $X.B^2=AB$ siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$

Sol $X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/6\\ -1 & 1/2 & -1/3\\ 0 & 0 & 1/6\end{pmatrix}$

9.- Calcular X verificando $\frac{1}{3}AX+B=C$ con $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 4 & 9\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 4 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$

Sol: $X=3A^{-1}(C-B)=3\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7 & -7 & 4\\ 20 & -17 & 8\\ 14 & -11 & 5\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}7 & 8\\ 4 & 3\\ 5 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 5\\ 4 & 9\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}23 & 67\\ 52 & 170\\ 34 & 113\end{pmatrix}$

10.- Hallar X para que se verifique A.(B-I)=XB+A con $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 3 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Sol: $X=\begin{pmatrix}-13 & -21 & 10\\ -3 & -12 & 11\\ 3 & 10 & -4\end{pmatrix}$