Ejercicios y problemas resueltos

Página 79

1. Cálculo de un determinante de orden 4

Hazlo tú. Calcula el valor de este determinante en función del parámetro a:

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{vmatrix} = a^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sumamos las filas 2.ª, 3.ª y 4.ª a la 1.ª:

$$a^4 \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5a^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \to = 5a^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5a^4$$

El valor del último determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, por corresponder a una matriz triangular.

2. Propiedades de los determinantes

Hazlo tú. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$, **calcula el valor de estos determinantes sin desarrollarlos:**

a) $\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & z+y & 5x \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \to = \begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) - 2 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \to = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 14$$

b) $$\begin{vmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & z+y & 5x \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -b & c+b & a \\ -q & r+q & p \\ -y & z+y & x \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} b & c+b & a \\ q & r+q & p \\ y & z+y & x \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} -5 \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} \overset{(**)}{=} -5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -35$$

(*) 2.ª columna – 1.ª.

(**) Permutamos la 3.ª columna por la 2.ª y luego, la 2.ª columna por la 1.ª.

3. Resolver una ecuación

Hazlo tú. Comprueba, sin calcular el valor del determinante, que la siguiente ecuación tiene tres soluciones:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

Esta ecuación es de grado 3, tiene como máximo 3 soluciones y tiene un número impar de soluciones reales.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 4 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x^3 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{COLUMNAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \end{array}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 2-x & -3-x & 4-x \\ x^2 & 4-x^2 & 9-x^2 & 16-x^2 \\ x^3 & 8-x^3 & 27-x^3 & 64-x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)(4-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & -3-x & 1 \\ x^2 & x+2 & 9-x^2 & x+4 \\ x^3 & x^2+2x+4 & 27-x^3 & x^2+4x+16 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{COLUMNAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)-(2.^a) \end{array}} =$$

$$= (2-x)(4-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & -3-x & 0 \\ x^2 & x+2 & 9-x^2 & 2 \\ x^3 & x^2+2x+4 & 27-x^3 & 2x+12 \end{vmatrix} = 0$$

Esta ecuación tiene al menos dos soluciones, por tanto tiene tres soluciones.

Página 80

4. Demostrar una igualdad

Hazlo tú. Demuestra que existe una matriz cuadrada A, de orden 2, simétrica y con $|A| = -7$ que verifica:

$$A\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a-b & 6a-3b \\ 2b-c & 6b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a-b=-4 \\ 2b-c=1 \end{array}\right\} \to a = \frac{\lambda-7}{4},\ b = \frac{\lambda+1}{2},\ c = \lambda$$

$$|A| = \frac{\lambda-7}{4}\lambda - \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^2 = -7 \to \lambda = 3 \to A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Estudio del rango de una matriz que depende de un parámetro

Hazlo tú. Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro k:

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -k & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ k & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ **b)** $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & k \end{pmatrix}$

a) El menor formado por las tres primeras columnas es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -k & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ k & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9k^2 - 36k + 36$$

$9k^2 - 36k + 36 = 0 \;\rightarrow\; k = 2$

- Si $k \neq 2 \;\rightarrow\; ran(M) = 3$
- Si $k = 2 \;\rightarrow\; ran(M) < 3$, porque la 3.ª y la 4.ª columnas son proporcionales.

Para $k = 2$: $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

Todas las columnas son porporcionales, luego $ran(M) = 1$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(M) \geq 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & k \end{vmatrix} = 20 - 2k$$

$20 - 2k = 0 \;\rightarrow\; k = 10$

- Si $k \neq 10 \;\rightarrow\; ran(M) = 4$
- Si $k = 10 \;\rightarrow\; ran(M) = 3$

Página 81

6. Propiedades de los determinantes y rango de una matriz

Hazlo tú. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2, tales que $ran(A) = 2$ y $ran(B) = 1$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?:

a) $ran(A + B) = 3$

b) $ran(A + B) \leq 2$

c) $ran(A + B) > 1$

a) Falsa, porque $A + B$ tiene dimensión 2×2, no tiene 3 filas ni 3 columnas.

b) Verdadera, porque $A + B$ tiene dimensión 2×2.

c) Falsa:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; ran(A) = 2 \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; ran(B) = 1$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; ran(A + B) = 1$

7. Cálculo de la matriz inversa

Hazlo tú. Dada esta matriz:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}}$$

a) Halla los valores de $\boldsymbol{a}$ para los cuales $\boldsymbol{A}$ es regular.

b) Para $\boldsymbol{a = 2}$, halla la matriz inversa de $\boldsymbol{A}$.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3$

$-a^2 + 4a - 3 = 0 \ \rightarrow\ a = 3,\ a = 1$

A es regular para $a \neq 3$ y $a \neq 1$.

b) $a = 2$:

$|A| = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & -12 & -8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 82

1. Propiedades de los determinantes

Si c_1, c_2 y c_3 son las columnas 1.ª, 2.ª y 3.ª de una matriz cuadrada de orden 3 tal que $|c_1\ c_2\ c_3| = 7$, calcular:

a) $|c_3\ c_1\ c_2|$ **b)** $|3c_1\ \ c_2 + c_1\ \ -c_3|$ **c)** $|c_1 + 2c_3\ \ c_2\ \ 2c_3 - c_1|$

a) $|c_3\ \ c_1\ \ c_2| = (-1)^2|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 7$

b) $|3c_1\ \ c_2 + c_1\ \ -c_3| = 3(-1)|c_1\ \ c_2 + c_1\ \ c_3| = -3|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = -21$

c) $|c_1 + 2c_3\ \ c_2\ \ 2c_3 - c_1| = |c_1\ \ c_2 + c_1\ \ 4c_3| = 4|c_1\ \ c_2 + c_1\ \ c_3| = 28$

2. Resolver una ecuación con un determinante

Estudiar, según los valores de a, el número de soluciones reales que tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+3a & a & a & a \\ x^2+3a & x^2 & a & a \\ x^2+3a & a & x^2 & a \\ x^2+3a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; (x^2+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & x^2 & a & a \\ 1 & a & x^2 & a \\ 1 & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; (x^2+3a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & x^2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-a \end{vmatrix} = 0$$

$(x^2 + 3a)(x^2 - a)^3 = 0$

- Si $a = 0 \rightarrow x^8 = 0 \rightarrow x = 0$
- Si $a > 0 \rightarrow (x^2 + 3a) = 0$, no tiene solución $\rightarrow (x^2 - a)^3 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{a}$, $x = \sqrt{a}$
- Si $a < 0 \rightarrow (x^2 - a)^3 = 0$, no tiene solución $\rightarrow (x^2 + 3a) = 0 \rightarrow x = -\sqrt{-3a}$, $x = \sqrt{-3a}$

3. Determinar los elementos de una matriz

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$$

determinar los valores de a, b y c de modo que $|B| = 8$ y $AB = BA$.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{vmatrix} = 3b - 2a + 2c - ab + 6 = 8$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b+6 & 2a+c-6 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a-1 \\ 2b+4 & b+c+2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} b+6=4 \\ 2a+c-6=a-1 \\ c=b+c+2 \end{array}\right\} \rightarrow b=-2$$

$$\left.\begin{array}{l} b=-2 \\ 2a+c-6=a-1 \\ 3b-2a+2c-ab+6=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-2 \\ a+c=5 \\ -6-2a+2c+2a+6=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-2 \\ a+c=5 \\ 2c=8 \end{array}\right\} \rightarrow a=1,\ b=-2,\ c=4$$

4. Rango de una matriz que depende de dos parámetros

Estudiar el rango de esta matriz:

$$\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & b \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 2 & -2 \end{pmatrix}}$$

$ran(B) \le 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = a + 1$$

Si $a \ne -1 \rightarrow ran(B) = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2b - 4$$

Si $b \ne -2 \rightarrow ran(B) = 3$

Si $a = -1$ y $b = 3 \rightarrow ran(B) = 2$

5. Resolver una ecuación matricial

Dada la matriz $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$***:***

a) Calcular los valores de m para los que A tiene inversa.

b) Para $m = 1$, calcular la matriz X que verifica $XA + X - 2A = 0$.

a) $\begin{vmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = m^2 - 2m$

$m^2 - 2m = 0 \rightarrow m = 0,\ m = 2$

Si $m \ne 0$ y $m \ne 2 \rightarrow A$ tiene inversa.

b) $XA + X - 2A = 0 \rightarrow X(A + I) = 2A \rightarrow X = 2A(A + I)^{-1}$

Para comprobar que este paso es válido, veamos si $(A + I)^{-1}$ existe.

$$A + I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A + I| = -1$, luego tiene inversa.

$$(A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 83

Para practicar

Determinantes. Propiedades

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 7 - 7a = 0 \rightarrow a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3 = 0 \rightarrow a = 1,\ a = -3$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a = \sqrt{3},\ a = -\sqrt{3}$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -a^3 - a^2 + 6a = 0 \rightarrow a = -3,\ a = 0,\ a = 2$

2 Halla el valor de los siguientes determinantes de orden 4:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-12) = -24$

(1) Desarrollamos por la 3.ª columna.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} 0$

(1) El determinante se anula, puesto que tiene dos filas iguales.

3 **Calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -72$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 938$

4 **Si** $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, **¿cuál es el valor de cada uno de los siguientes determinantes? Justifica las respuestas:**

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \frac{1}{m} \cdot m\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 0$, pues las dos columnas son proporcionales.

(1) Si a una fila le sumamos otra multiplicada por un número, el determinante no varía.

(2) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

(3) Si cambiamos de orden dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

(4) Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

5 **Sustituye los puntos suspensivos por los números adecuados para que se verifiquen las siguientes igualdades:**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \mathbf{7} \\ \dots & \mathbf{-3} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

6 **Sabiendo que** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, **calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Sacamos $\frac{1}{2}$ factor común de la 3.ª fila. El 2.° determinante es 0, pues las dos primeras filas son proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix} = \overset{\begin{array}{c}\text{COLUMNAS}\\ (1.^a)-(3.^a)\\ (2.^a)+(3.^a)\\ (3.^a)\end{array}}{\longrightarrow} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -a & b & c \\ -x & y & z \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -5$

(1) Sacamos –1 factor común de la 1.ª columna.

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \overset{\begin{array}{c}\text{FILAS}\\ (1.^a)\\ (2.^a)-(3.^a)\\ (3.^a)\end{array}}{\longrightarrow} \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} =$

$= \overset{\begin{array}{c}\text{FILAS}\\ (1.^a)+(3.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a)\end{array}}{\longrightarrow} 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$

(1) Sacamos factor común el 2 de la 3.ª fila.

7 **Sabiendo que** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ a & b & c \end{vmatrix} = 3$ **y utilizando las propiedades de los determinantes, calcula:**

a) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ a & b & c \end{pmatrix}^4$. **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{20} & \mathbf{30} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3a+2 & 3b+4 & 3c+6 \\ 2a & 2b & 2c \\ a+6 & b & c+3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 6$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix}^4 = 6^4$

La solución es $6^4 = 1\,296$

b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 10 \cdot \dfrac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 10 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 60$

c) $\begin{vmatrix} 3a+2 & 3b+4 & 3c+6 \\ 2a & 2b & 2c \\ a+6 & b & c+3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3a+2 & 3b+4 & 3c+6 \\ a & b & c \\ a+6 & b & c+3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ a & b & c \\ a+6 & b & c+3 \end{vmatrix} =$

$$= 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+6 & b & c+3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -12$$

8 **a) Resuelve la ecuación $|A| = 0$ siendo $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$.**

b) Para $a = 3$, obtén el determinante de la matriz $2A$.

a) $\begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{vmatrix} \begin{matrix} (1.^{a}) \\ (2.^{a}) \\ (3.^{a}) + (1.^{a}) \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2(a-1) = 0 \rightarrow a = 0,\ a = 1$

b) $a = 3$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$|2A| = 2^3 |A| = 8 \cdot 9 \cdot 2 = 144$

Rango de una matriz

9 **Halla el rango de estas matrices:**

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow ran(A) \geq 2$

Las dos últimas filas son linealmente independientes.

Veamos si la 2.ª fila depende linealmente de las dos últimas:

$\begin{vmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ La 2.ª fila depende linealmente de las dos últimas.

Veamos si la 1.ª fila depende de las dos últimas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0. \text{ Por tanto, } ran\ (A) = 3.$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Las dos primeras columnas son linealmente independientes. Luego, $ran\ (B) \geq 2$.

Veamos si la 3.ª columna depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \text{ Por tanto, } ran\ (B) = 3.$$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos $|C|$:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \xrightarrow{\begin{array}{c}\text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a)\end{array}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2 - 1) = 2 \neq 0 \;\longrightarrow\; ran\ (C) = 4$$

(1) Desarrollamos por la 1.ª columna.

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la 3.ª fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 4 + 7 = 0 \\[2ex] \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -8 - 6 + 14 = 0 \end{array}\right\} \text{La 3.ª fila depende linealmente de las otras dos.}$$

Por tanto, $ran\ (D) = 2$

10 **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$

- Si $a = 2 \rightarrow$ Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$

- Si $a \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 2 - 2a + 2 = 4a^2 - 2a = 0 \rightarrow 2a(2a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$

Observamos que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(B) \geq 2$

- Si $a = 0 \rightarrow |B| = 0 \rightarrow ran(B) = 2$

- Si $a = \frac{1}{2} \rightarrow |B| = 0 \rightarrow ran(B) = 2$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq \frac{1}{2} \rightarrow |B| \neq 0 \rightarrow ran(B) = 3$

c) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow a = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \dfrac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = 1 \end{cases}$

Observamos que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \rightarrow ran(C) \geq 2$

Por tanto:

- Si $a = 1 \rightarrow |C| = 0 \rightarrow ran(C) = 2$

- Si $a = -8 \rightarrow |C| = 0 \rightarrow ran(C) = 2$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -8 \rightarrow |C| \neq 0 \rightarrow ran(C) = 3$

d) $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + 1 + a - 1 - a = -a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

- Si $a = 1 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(D) = 2$

- Si $a = -1 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(D) = 2$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \rightarrow |D| \neq 0 \rightarrow ran(D) = 3$

11 **Halla los valores del parámetro m para los que el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$ es menor que 3.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & m^2-m & m^2-m \\ m & 0 & m^2-m \end{vmatrix} = (m^2-m)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & m^2-m & 1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (m^2-m)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = (m^2-m)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = (m^2-m)^2$$

$(m^2-m)^2 = 0 \rightarrow m = 1,\ m = 0$

Si $m = 0$ o $m = 1$, entonces $ran(A) < 3$

12 **Estudia el rango de estas matrices según el valor del parámetro a:**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} a-2 & 1-2a & -1 \\ a & a & 2a \end{pmatrix}$

a) Si $|A| = 0 \rightarrow a = 2$

- Si $a = 2 \rightarrow ran(A) = 3$
- Si $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = 4$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

- Si $a = 4 \rightarrow$ las cuatro filas son proporcionales $\rightarrow ran(B) = 1$
- Si $a \neq 4 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & a \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(B) = 2$

c) $C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

- Si $a = 1$, queda:

  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 1$

- Si $a = -1$, queda:

  $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(C) = 2$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \rightarrow ran(C) = 2$

d) $D = \begin{pmatrix} a-2 & 1-2a & -1 \\ a & a & 2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a-2 & 1-2a \\ a & a \end{vmatrix} = a^2 - 2a - a + 2a^2 = 3a^2 - 3a = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

- Si $a = 0 \rightarrow D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(D) = 1$
- Si $a = 1 \rightarrow D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Las dos filas no son proporcionales $\rightarrow ran(D) = 2$
- Si $a \neq 0 \rightarrow ran(D) = 2$

13 **Estudia el rango de la matriz M según los valores de t.**

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & t & 4 & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$ c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t+1 & 1 \\ t & 0 & 0 & 2 \\ 0 & t & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & t & 2 \\ 1 & 8-3t & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & t-2 & 1 \\ 0 & 6-3t & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 3t-6 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 3(t-2) & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(M) < 3$$

Tomamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran(M) = 2,$ para cualquier t.

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & t & 4 & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & t & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ t & 4 & 0 \\ 3 & t & -2 \end{vmatrix} = 2t^2 + 8t - 24$$

$2t^2 + 8t - 24 = 0 \rightarrow t = 2, \ t = -6$

Si $t \neq 2$ y $t \neq -6 \rightarrow ran(M) = 3$

Tomamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$

Si $t = 2 \rightarrow ran(M) = 2$

Si $t = -6 \rightarrow ran(M) = 2$

c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t+1 & 1 \\ t & 0 & 0 & 2 \\ 0 & t & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & t+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ t & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2t^2 + 2t - 4$$

$2t^2 + 2t - 4 = 0 \rightarrow t = 1, \ t = -2$

$$\begin{vmatrix} 1 & t+1 & 1 \\ t & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2t - 4$$

$2t - 4 = 0 \rightarrow t = 2$

Como se anulan en puntos distintos, tenemos que $ran(M) = 3,$ para cualquier t.

14 **Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:**

a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1+a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & -1 \\ -a-1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 & -a+2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & a & a-2 & 1 \\ 1 & 2a & a-4 & 3 \\ a & a^2 & 2a^2-2a-4 & 2a+2 \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & 2a & 5 & a \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, luego $ran(A) \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 2a & 5 & a \end{vmatrix} = -3a^2 + 8a - 5 = 0 \rightarrow a = \frac{5}{3},\ a = 1$$

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 8a + 6 = 0 \rightarrow a = 3,\ a = 1$$

Solo se anulan los dos menores de orden 3 si $a = 1$.

- Si $a \neq 1 \rightarrow ran(A) = 3$
- Si $a = 1 \rightarrow ran(A) = 2$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1+a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, luego $ran(B) \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1+a & 0 \end{vmatrix} = 2a^2 - 2 = 0 \rightarrow a = -1,\ a = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 2 & a+1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \rightarrow ran(B) = 3$
- Si $a = 1 \rightarrow ran(B) = 2$
- Si $a = -1 \rightarrow ran(B) = 2$

c) $C = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & -1 \\ -a-1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 & -a+2 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, luego $ran(C) \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix} = a^3 - a = 0 \rightarrow a = 1,\ a = 0,\ a = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & a^2-a-1 & -a+2 \end{vmatrix} = -2a^2 + 4a - 2 = 0 \rightarrow a = 1$$

- Si $a \neq 1 \rightarrow ran(C) = 3$
- Si $a = 1 \rightarrow ran(C) = 2$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & a & a-2 & 1 \\ 1 & 2a & a-4 & 3 \\ a & a^2 & 2a^2-2a-4 & 2a+2 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, luego $ran(D) \geq 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 2 \\ a & a^2 & 2a+2 \end{vmatrix} = a^2 + 2a = 0 \ \rightarrow\ a = -2,\ a = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-2 & 1 \\ 1 & a-4 & 3 \\ a & 2a^2-2a-4 & 2a+2 \end{vmatrix} = -2a^2 - 2a + 4 = 0 \ \rightarrow\ a = 1,\ a = -2$$

- Si $a \neq -2 \ \rightarrow\ ran(D) = 3$
- Si $a = 1 \ \rightarrow\ ran(D) = 2$

Matriz inversa

15 Halla la matriz inversa de las siguientes matrices:

a) $\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}}$

b) $\boldsymbol{N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}}$

a) $|M| = 2 \neq 0 \ \rightarrow$ la matriz M tiene inversa. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\ (M) \longrightarrow (Adj\ (M))^t \longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{|M|}(Adj\ (M))^t$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa.

b) $|N| = 6 \neq 0 \ \rightarrow$ la matriz N tiene inversa. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\ (N) \longrightarrow (Adj\ (N))^t \longrightarrow N^{-1} = \frac{1}{|N|}(Adj\ (N))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = N^{-1}$$

$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 5/6 & 1/2 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa.

16 **a) Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Resuelve las ecuaciones $AX = B$ y $XB = A$ siendo A y B las matrices del apartado anterior.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to$ Existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

b) $AX = B \to A^{-1}AX = A^{-1}B \to X = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -19 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$XB = A \to XBB^{-1} = AB^{-1} \to X = AB^{-1}$

$$X = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -7/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

17 **Calcula la inversa de esta matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

18 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$**, halla:**

a) Los valores de x para los que la matriz A posee inversa.

b) La inversa de A para $x = 2$.

c) El valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz bA tenga determinante 1.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 4x - 3 = 0 \to x = 3,\ x = 1$

A posee inversa si $x \neq 3$ y $x \neq 1$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7 & -12 & -8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Suponemos $x \neq 3$ y $x \neq 1$:

$|bA| = b^3|A| = 1 \to b^3 = \dfrac{1}{|A|}$

$b = \sqrt[3]{\dfrac{1}{|A|}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{-x^2 + 4x - 3}}$

19 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$**:**

a) Calcula $A(2I - A)$.

b) Justifica si existen las matrices inversas de A y $2I - A$.

c) ¿Para qué valor de k se verifica $A^{-1} = kI - A$?

a) $A(2I - A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A(2I - A) = I \to A$ y $2I - A$ tienen inversa y cada una es la inversa de la otra.

$A^{-1} = 2I - A$

$(2I - A)^{-1} = A$

c) $k = 2$

20 **Halla los valores del parámetro t para los cuales las matrices A y B no son regulares y calcula:**

a) A^{-1} si $t = 1$.

b) B^{-1} si $t = 2$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $|A| = t^2 + 4t - 12 = 0 \to t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{-4 \pm 8}{2} \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases}$

A no es invertible para $t = 2$ ni para $t = -6$.

Calculamos A^{-1} para $t = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to |A| = -7$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 1 - t^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

B no es invertible para $t = 1$ ni para $t = -1$.

Calculamos B^{-1} para $t = 2$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to |B| = -3$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Ecuaciones matriciales

21 Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}A^{-1}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

22 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encuentra la matriz X tal que $AXB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$AXB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}B^{-1}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos B^{-1}:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

23 **Resuelve la ecuación $AXB = C$ siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$AXB = C \to A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \to X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Calculamos A^{-1} y B^{-1} ($|A| = 1$ y $|B| = 1 \to$ existen A^{-1} y B^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

24 **Dadas las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica $(AB^t + C)X = D$.

$(AB^t + C)X = D \to (AB^t + C)^{-1}(AB^t + C)X = (AB^t + C)^{-1}D \to X = (AB^t + C)^{-1}D$

- Sea $E = AB^t + C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Calculamos E^{-1} ($|E| = 6 \neq 0 \to$ existe E^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(E) \longrightarrow (Adj\,(E))^t \longrightarrow E^{-1} = \frac{1}{|E|}(Adj\,(E))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \to \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} = E^{-1}$$

- Por tanto:

$$X = (AB^t + C)^{-1}D = E^{-1}D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

25 **Halla X tal que $3AX = B$, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$3AX = B \to X = \frac{1}{3} A^{-1} \cdot B$

Calculamos A^{-1} ($|A| = -1 \neq 0 \to$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Página 85

26 **Dadas las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m existe A^{-1}?

b) Para $m = 1$, halla la matriz X tal que $XA + B = C$.

a) $|A| = \begin{vmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m$

Existe A^{-1} si $m \neq 0$.

b) $XA + B = C \to XA = C - B \to X = (C - B)A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = (C - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

27 **Sean las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores de k la matriz AB tiene inversa.

b) Resuelve la ecuación $ABX = 3I$ para $k = 0$, donde I es la matriz unidad de orden 2.

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3k - 2 = 0 \rightarrow k = -\dfrac{2}{3}$

Existe $(AB)^{-1}$ si $k \neq -\dfrac{2}{3}$

b) $ABX = 3I \rightarrow X = 3(AB)^{-1}$

$k = 0$

$AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$X = 3\begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$

Para resolver

28 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} x\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} x \cdot x^3 - 1 = x^4 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

(1) Desarrollamos por la 1.ª columna.

(2) Son determinantes de matrices triangulares.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x-b & 0 \\ 0 & 0 & x-c \end{vmatrix} = a(x-b)(x-c) = 0 \begin{cases} x = b \\ x = c \end{cases}$

(Suponemos que $a \neq 0$).

c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 1 \\ 2-x & -x & 1 & 0 \\ 2-x & 1 & -x & 1 \\ 2-x & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (2-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} =$

$$= \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} -x-1 & 1 & -1 \\ 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -x\begin{vmatrix} -x-1 & -1 \\ -1 & -x-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -x^2(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

(1) Sumamos a la 1.ª columna las demás.

(2) Sacamos $(2-x)$ factor común de la 1.ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1.ª columna.

(4) Desarrollamos por la 2.ª fila.

d) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (x-1)\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} =$

$$= (x-1)(x^3+1+x-x) = (x-1)(x^3+1) = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x^3+1 = 0 \to x = -1 \end{cases}$$

(1) Sumamos a la 1.ª columna la 2.ª.

(2) Desarrollamos por la 1.ª columna.

29 **Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro que contienen:**

a) $A = \begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} k & k & -1 & -2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a)-2\cdot(4.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) \end{array} \begin{vmatrix} k-2 & k & -5 & 0 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} k-2 & k & -5 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$

$$= -5\begin{vmatrix} 3 & -k \\ 5 & k \end{vmatrix} = -40k = 0 \to k = 0$$

(1) Desarrollamos por la 4.ª columna.

(2) Desarrollamos por la 3.ª columna.

- Si $k = 0 \to A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(A) = 3$

- Si $k \neq 0 \to |A| \neq 0 \to ran(A) = 4$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Hacemos $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ k & k & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6k - 18 = 0 \rightarrow k = 3$

• Si $k = 3 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(B) = 3$

• Si $k \neq 3 \rightarrow ran(B) = 3$

Por tanto, $ran(B) = 3$ para cualquier valor de k.

c) $\begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow$ Hacemos $\begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -k^2 + 1 = 0 \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$

• Si $k = 1 \rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(C) = 3$

• Si $k = -1 \rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(C) = 2$

• Si $k \neq -1 \rightarrow ran(C) = 3$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & -1 \\ 1 & a+3 & 4-a & 0 \\ 1 & a+3 & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & a+3 & 4-a \\ 1 & a+3 & a^2+2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=}$

$$= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 4-a \\ 1 & 1 & a^2+2 \end{vmatrix} = (a+3)(a^2 + a - 2) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \\ a = -3 \end{cases}$$

(1) Sacamos $(a + 3)$ factor común de la 2.ª columna.

• Si $a = 1 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(D) = 3$

• Si $a = -2 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(D) = 2$

• Si $a = -3 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 11 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 11 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(D) = 3$

• Si $a \neq -2 \rightarrow ran(D) = 3$

30 **Calcula el rango de estas matrices en función del parámetro t:**

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 2 & t & t^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -t^3 + 3t^2 - 2t = 0 \quad t = 0,\; t = 1,\; t = 2$

- Si $t = 0 \to A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(A) = 3$

- Si $t = 1 \to A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(A) = 3$

- Si $t = 2 \to A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(A) = 2$

- Si $t \neq 2 \to ran(A) = 3$

b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix} \to |B| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{vmatrix} = t(t^2 - 3t + 2) = 0 \quad t = 0,\; t = 1,\; t = 2$

- Si $t = 0 \to B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(B) = 2$

- Si $t = 1 \to B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(B) = 2$

- Si $t = 2 \to B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(B) = 2$

- Si $t \neq 0,\; t \neq 1$ y $t \neq 2 \to ran(B) = 3$

c) $C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \end{vmatrix} = -3(3t-6) = 0 \to t = 2$

- Si $t = 2 \to C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(C) = 2$

- Si $t \neq 2 \to ran(C) = 3$

31 Comprueba aplicando las propiedades de los determinantes.

a) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1)^2$

a) $$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-2ab+b^2 & ab & b^2 \\ 2a-2(a+b)+2b & a+b & 2b \\ 1-2+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-2ab+b^2 & ab & b^2 \\ 0 & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2-2ab+b^2 & ab & b^2-ab \\ 0 & a+b & 2b-(a+b) \\ 0 & 1 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 0 & a+b-2b & 2b \\ 0 & 1-1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 0 & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix} = (a^2-1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a^2-1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)(a-1)(a+1) = (a^2-1)^2$$

32 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$**:**

a) Resuelve la ecuación $|A| = 0$.

b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x.

a) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 2$

b) Si $x = -1 \rightarrow ran(A) = 1$

Si $x = 2 \rightarrow ran(A) = 2$

Si $x \neq -1$ y $x \neq 2 \rightarrow ran(A) = 3$

33 **Dada esta matriz de orden n:**

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

calcula el determinante de A_2, A_3 y A_5.

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 10$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10^2 = 100$$

$$|A_5| = 10^4 = 10\,000$$

34 **a) Estudia para qué valores de a tiene inversa esta matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

b) Halla la inversa de A siempre que sea posible.

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a \to$ Existe A^{-1} si $a \neq 0$.

b) $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a & -(a^2-1) & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-a^2-1)/a & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{pmatrix}$$

35 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:**

a) Encuentra la expresión general de A^n donde n es un número natural cualquiera.

b) Razona que A^n tiene inversa para cualquier $n \geq 1$ y calcula dicha matriz inversa.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to A^n$ tiene inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

36 Halla, en función de a, el valor de estos determinantes:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 4a+1 & a & a & a \\ 4a+1 & a+1 & a & a \\ 4a+1 & a & a+1 & a \\ 4a+1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$= (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+1 & a & a \\ 1 & a & a+1 & a \\ 1 & a & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ \hline (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \end{array} \; (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$= (4a+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4a+1)\cdot 1 = 4a+1$$

(1) Sumamos a la 1.ª columna las demás.

(2) Sacamos $(4a+1)$ factor común, de la 1.ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1.ª columna.

$$A_2 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ \hline (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \end{array} \; \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= -a\begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 3-a & 2-a & 0 \\ 4-a & 3-a & 2-a \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -a(2-a)^3 = a(a-2)^3$$

(1) Desarrollamos por la 4.ª columna

(2) Es el determinante de una matriz triangular.

37 Prueba, sin desarrollarlos, que el valor de los siguientes determinantes es 0:

a) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ \hline (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \end{array} \; \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

pues las dos últimas filas son proporcionales.

b) $$\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/x & 1/y & 1/z \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \frac{1}{x}\,\frac{1}{y}\,\frac{1}{z}\begin{vmatrix} xyz & xyz & xyz \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 0$$

(1) Sacamos factor común $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ y $\frac{1}{z}$ en la 1.ª, 2.ª y 3.ª columnas.

(2) La 1.ª y 3.ª filas son proporcinales $(xyz \cdot 1.^a = 3.^a)$.

38 **Considera la matriz** $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$**, donde** a**,** b **y** c **son no nulos.**

a) Determina el número de columnas de A **que son linealmente independientes.**

b) Calcula el rango de A**.**

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = abc \cdot 0 = 0$$

Pero $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -b \end{vmatrix} = -ab + 2ab = ab \neq 0$, pues a y b son no nulos.

Por tanto:

a) Hay dos columnas en la matriz A que son linealmente independientes.

b) $ran(A) = 2$.

39 **Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de** a**,** b **y** c**:**

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (a+b+c) \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 0$$

(1) Sumamos a la 2.ª fila la 3.ª

(2) Sacamos $(a + b + c)$ factor común de la 2.ª fila.

(3) Las dos primeras filas son proporcionales.

Luego, $ran(M) \leq 2$. Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5b - 5a = 0 \ \rightarrow \ b = a$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ b & c \end{vmatrix} = 5c - 5b = 0 \ \rightarrow \ c = b$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & c \end{vmatrix} = 5c - 5a \ \rightarrow \ a = c$$

Por tanto:

- Si $a = b = c \ \rightarrow \ ran(M) = 1$
- En otro caso $\rightarrow \ ran(M) = 2$

40 **Estudia el rango de esta matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 1$$

(1) Desarrollamos el determinante por la 3.ª fila o por la 3.ª columna.

Por tanto, como $|A| \neq 0$, tenemos que $ran(A) = 3$.

Cuestiones teóricas

41 **¿Verdadero o falso? Justifica las respuestas y pon ejemplos.**

a) Si c_1, c_2 y c_3 son las columnas 1.ª, 2.ª y 3.ª de una matriz cuadrada de orden 3 tal que $|c_1 \ \ c_2 \ \ c_3| = 5$, entonces:

I) $|c_2 \ \ 2c_3 \ \ c_1| = 10$

II) $|c_1 + c_2 \ \ c_2 - c_1 \ \ c_3| = 0$

III) $|c_1 + c_3 \ \ c_2 \ \ c_3 + c_1| = 5$

IV) $|-c_2 \ \ 2c_1 - c_3 \ \ c_3 + c_2| = 10$

b) Si B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante vale 4, entonces:

I) $|5B| = 20$ II) $|B^2| = 16$ III) $|B^{-1}| = 1/4$

c) La única solución de $\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$ es $x = -1$.

d) La matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ es:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} a & -a^2+1 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{a}, \ a \neq 0$$

e) Si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 2A - I$, entonces A es invertible y $A^{-1} = 2I - A$.

f) Si A y B son dos matrices regulares que verifican que $AXB = A + B$, entonces $X = A^{-1} + B^{-1}$.

a) I) Verdadero:

$$|c_2 \ \ 2c_3 \ \ c_1| = 2|c_2 \ \ c_3 \ \ c_1| = (-1)^2\, 2|c_1 \ \ c_2 \ \ c_3| = 10$$

II) Falso:

$$|c_1 + c_2 \ \ c_2 - c_1 \ \ c_3| = |c_1 + c_2 \ \ 2c_2 \ \ c_3| = 2|c_1 + c_2 \ \ c_2 \ \ c_3| = 2|c_1 \ \ c_2 \ \ c_3| = 10$$

III) Falso:

$$|c_1 + c_3 \ \ c_2 \ \ c_3 + c_1| = |c_1 + c_3 \ \ c_2 \ \ 0| = 0$$

IV) Verdadero:

$$|-c_2 \ \ 2c_1 - c_3 \ \ c_3 + c_2| = |-c_2 \ \ 2c_1 - c_3 \ \ c_3| = |-c_2 \ \ 2c_1 \ \ c_3| = 2|-c_2 \ \ c_1 \ \ c_3| =$$
$$= -2|c_2 \ \ c_1 \ \ c_3| = (-1)(-2)|c_1 \ \ c_2 \ \ c_3| = 10$$

b) I) Falso:

$$|5B| = 5^3|B| = 5^3 \cdot 4 = 500$$

II) Verdadero:

$$|B^2| = |B \cdot B| = |B||B| = 16$$

III) Verdadero:

$$|B \cdot B^{-1}| = |B||B^{-1}| = 1 \ \rightarrow \ |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{4}$$

c) Falso:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$$

$-x^3 + 3x + 2 = 0$

Las soluciones son: $x = -1$, $x = 2$

d) Verdadero:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/a\,(-a^2+1) & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} a & 1-a^2 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Verdadero:

$$A^2 = 2A - I \to A^2 - 2A = -I \to A(A-2I) = -I \to A(2I - A) = I$$

Luego A es invertible con $A^{-1} = 2I - A$.

f) Verdadero:

$$AXB = A + B \to X = A^{-1}(A+B)B^{-1} = (I + A^{-1}B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$$

42 **Prueba que el determinante de una matriz cualquiera de orden 3 es igual que el de su traspuesta.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Aplicando la definición de determinante, obtenemos que $|A^t| = |A|$. Lo vemos:

$|A| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$

$|A^t| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$

Luego $|A| = |A^t|$.

43 **¿Sabrías decir cuál de estos dos productos puede formar parte del desarrollo de un determinante de orden 4?:**

a) $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42}$

b) $a_{14} \cdot a_{41} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

Solo podría ser b), puesto que en cada producto ha de aparecer un factor de cada fila y uno de cada columna.

44 **Si A es una matriz cuadrada de orden 4, ¿puedes saber el valor de $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} + a_{24}A_{14}$ sin conocer los elementos de la matriz?**

El resultado es 0, pues tenemos un producto de los elementos de una fila (la 2.ª) por los adjuntos de otra (la 1.ª).

45 **Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿qué rango tendrá la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ m-a & n-b & p-c \end{pmatrix}$?**

Observamos que la 3.ª fila de B (la que hemos añadido respecto a A), es combinación lineal de las dos primeras (se obtiene restando la 2.ª menos la 1.ª). Por tanto, B tendrá el mismo rango que A, es decir, $ran(B) = 2$.

46 **Dadas las matrices A y B de orden 4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$, calcula $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ y $|(AB^{-1})^t|$.**

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$|B^t \cdot A| \overset{(2)}{=} |B^t| \cdot |A| \overset{(3)}{=} |B| \cdot |A| = 2 \cdot 3 = 6$$

$$|(AB^{-1})^t| \overset{(3)}{=} |AB^{-1}| \overset{(2)}{=} |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{|A|}{|B|} = \frac{3}{2}$$

(1) El determinante de la inversa de una matriz es el inverso del determinante de la matriz.

(2) Tenemos en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

(3) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

47 **a) Define a qué se llama rango de una matriz.**

b) Indica, razonando la respuesta, cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

I) $ran(A) = ran(-A)$ **($-A$ es la matriz opuesta de A).**

II) $ran(A) = ran(A^t)$ **(A^t es la matriz traspuesta de A).**

III) $ran(A + B) = ran(A) + ran(B)$

IV) $ran(A^2) = [ran(A)]^2$

V) $ran(A) = ran(A^{-1})$ **si A tiene inversa (A^{-1} es la matriz inversa de A).**

a) El rango de una matriz es el número de filas (o de columnas) linealmente independientes. También podemos definirlo como el máximo orden de sus menores no nulos.

b) I) Verdadera. El hecho de cambiar de signo los elementos de A, solo afectará al signo de los menores; pero el máximo orden de los menores no nulos (el rango) no se ve influido.

II) Verdadera. El número de filas y el número de columnas linealmente independientes es el mismo. En A^t solo hemos cambiado filas por columnas.

III) Falsa. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \to A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$ran(A) = ran(B) = 2$ (pues $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$) y $ran(A + B) = 1$.

IV) Falsa. Por ejemplo, si A es una matriz de orden 2 y con $ran(A) = 2$, A^2 también será de orden 2; luego $ran(A^2) \le 2$, y $[ran(A)]^2 = 2^2 = 4$ (si A^2 es de orden 2 *no* puede tener rango 4).

V) Si A es una matriz cuadrada de orden n, y existe su inversa, entonces $|A| \neq 0$ (y $|A^{-1}| \neq 0$). Luego $ran(A) = ran(A^{-1}) = n$. Por tanto, la igualdad es verdadera.

48 **Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$. Demuestra que $det(A) = 0$ o $det(A) = 1$.**

$$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = |A| \to |A|^2 - |A| = 0 \to |A|(|A| - 1) = 0 \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 1 \end{cases}$$

(Hemos tenido en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$).

49 **Escribe dos matrices A y B de orden 2 tales que:**

a) $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$

b) $det(A + B) = det(A) + det(B)$

a) Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \; A + B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = 7$; $|B| = -11$; $|A + B| = 0 \neq |A| + |B| = -4$

b) Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \; A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$; $|B| = 0$; $|A + B| = 0 = |A| + |B|$

Para profundizar

50 **Demuestra, sin desarrollar el determinante, que:**

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{COLUMNAS} \\ (1.^a)-(3.^a) \\ (2.^a)-(3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2a-2b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & (a-b) & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a+b-2b) = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

(1) Sacamos $(a-b)$ factor común de la 1.ª y de la 2.ª columna.

(2) Desarrollamos por la 3.ª fila.

51 **Demuestra, sin desarrollar, que** $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$**.**

En el segundo miembro, multiplica y divide la 1.ª fila por a; la 2.ª, por b, y la 3.ª, por c.

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} bca & a^2 & a^3 \\ acb & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

52 **Prueba que** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$**.**

* ***Este determinante se llama de Vandermonde.***

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & (b-a) & (c-a) \\ a^2 & (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Página 87

53 **Determina las matrices cuadradas de orden 2 cuyos elementos sean números enteros, con determinante igual a –1, y tales que su inversa coincida con su traspuesta.**

* ***Haz*** $A \cdot A^t = I$ ***y*** $|A| = -1$. ***Hay 4 soluciones.***

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Si $A^t = A^{-1}$, ha de ser:

$$A \cdot A^t = I \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \end{cases}$$

Como a, b, c y d son enteros, tenemos solo cuatro soluciones: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

54 **Escribe una matriz con 3 filas y 3 columnas, que tenga 3 elementos nulos y tal que ninguno de sus menores de orden 2 sea nulo.**

Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ya que: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

55 **Demostración de que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ para determinantes de orden 2:**

$$|AB| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \underset{(1)}{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}} + \underset{(2)}{\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}} + \underset{(3)}{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix}} + \underset{(4)}{\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}}$$

a) Comprueba que los determinantes (1) y (4) son ambos cero.

b) En (2) y en (3) saca factor común los elementos b_{ij}. Llegarás a $|A| \cdot |B|$, como se quería demostrar.

a) (1) $\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = a_{11}\, b_{11}\, a_{21}\, b_{12} - a_{11}\, b_{12}\, a_{21}\, b_{11} = a_{11}\, a_{21}\, b_{11}\, b_{12} - a_{11}\, a_{21}\, b_{11}\, b_{12} = 0$

(4) $\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = a_{12}\, b_{21}\, a_{22}\, b_{22} - a_{12}\, b_{22}\, a_{22}\, b_{21} = a_{12}\, a_{22}\, b_{21}\, b_{22} - a_{12}\, a_{22}\, b_{21}\, b_{22} = 0$

b) (2) $\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}\, b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}\, b_{22}\, |A|$

(3) $\begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} = b_{21}\, b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -b_{21}\, b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -b_{21}\, b_{12}\, |A|$

Por tanto, queda:

$$|AB| = 0 + b_{11}\, b_{22}\, |A| - b_{21}\, b_{12}\, |A| + 0 = |A|\,(b_{11}\, b_{22} - b_{21}\, b_{12}) = |A| \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

56 **Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.**

a) Halla la matriz (A_{ij}).

b) Prueba que $A \cdot (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$.

c) ¿Qué relación hay entre $|A|$ y $|(A_{ij})|$?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$

$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$

b) $|A| = -8 - 8 + 3 = -13$

$$A \cdot (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -8 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -13 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

c) $|(A_{ij})| = 169 = (-13)^2 = |A|^2$

57 **Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con $|A| \neq 0$. Busca la relación que existe entre $|A|$ y $|(A_{ij})|$. Para ello, ten en cuenta el apartado b) del problema anterior y que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.**

- Sabemos que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta:

$$|A_{ij}| = |A_{ji}|$$

- Por otra parte, tenemos que (suponemos que existe A^{-1}):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) \rightarrow |A^{-1}| = \left(\frac{1}{|A|}\right)^3 \cdot |A_{ji}| = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ji}| = |A^{-1}|$$

- También sabemos que:

$$A \cdot A^{-1} = I \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

- Uniendo las dos igualdades obtenidas, tenemos que:

$$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^3} \cdot |A_{ij}| \rightarrow |A_{ij}| = |A|^2 \quad (A \text{ de orden } 3 \times 3)$$

58 **Si A es una matriz cuadrada de orden n, da el valor de $|(A_{ij})|$ en función de $|A|$.**

Con el mismo razonamiento que hemos seguido en el ejercicio anterior, llegamos a que si A es $n \times n$:

$$\left.\begin{array}{l} |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|^n}|A_{ij}| \\ |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \end{array}\right\} \rightarrow |A_{ij}| = |A|^{n-1}$$

Autoevaluación

Página 87

1 **Halla el valor de a que hace que la matriz A no sea regular.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{vmatrix} = 2a + 4 = 0 \ \rightarrow \ a = -2$$

A no es regular para $a = -2$.

2 **Calcula el valor de este determinante, dando el resultado factorizado:**

$$A = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= a(a+2)\begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = a(a+2)\begin{vmatrix} a-2 & a-2 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = a(a+2)(a-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= a(a+2)(a-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2(a+2)(a-2)$$

3 **Dadas las siguientes matrices:**

$$A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad B(y) = \begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de la matriz $3A(x)$ y obtén el valor de x para que ese determinante valga 162.

b) Demuestra que la matriz $B(y)$ no tiene inversa para ningún valor de y.

a) $$|A(x)| = \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2x & 3 & 6 \\ 4x & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 2x & 3 & 6 \\ 4x & 2 & 6 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6x$$

$|3A(x)| = 3^3|A(x)| = 3^3 \cdot 6x = 162x$

$|3A(x)| = 162 \ \rightarrow \ x = 1$

b) $$|B| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} = y\begin{vmatrix} 3 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot y = 0,$$

luego B no tiene inversa.

4 a) Estudia el rango de M según los valores de a y b.

$$M = \begin{pmatrix} 2a+b & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 \\ a & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

b) Halla M^{-1} en el caso $a = 1$, $b = -1$.

a) Veamos para qué valores de a y b el determinante de M se hace cero:

$$|M| = (2a+b)(b-a)^2 = 0 \to \begin{cases} 2a+b=0 \to b=-2a \\ b=a \end{cases}$$

• Si $b = a$, $M = \begin{pmatrix} 3a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• Si $b = -2a$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & -3a & 0 \\ a & 0 & -3a \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3a & 0 \\ 0 & -3a \end{vmatrix} = 9a^2$

Por lo tanto:

• Si $a = b = 0$, $ran(M) = 0$

• Si $a = b \neq 0$, $ran(M) = 1$

• Si $b = -2a \neq 0$, $ran(M) = 2$

• Si $a \neq b$ y $b \neq -2a$, $ran(M) = 3$

b) Para $a = 1$ y $b = -1$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad Adj(M^t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad |M| = 4$

Así, $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

5 Si c_1, c_2, c_3 son los vectores columna de una matriz tal que $|c_1 \;\; c_2 \;\; c_3| = 5$, calcula:

a) $|c_1 - 3c_2 \;\; c_2 \;\; c_3|$

b) $|c_1 \;\; c_2 \;\; 2c_3|$

c) $|c_1 \;\; c_1 - c_2 \;\; c_3|$

a) $|c_1 - 3c_2 \;\; c_2 \;\; c_3| = |c_1 \;\; c_2 \;\; c_3| = 5$

b) $|c_1 \;\; c_2 \;\; 2c_3| = 2|c_1 \;\; c_2 \;\; c_3| = 10$

c) $|c_1 \;\; c_1 - c_2 \;\; c_3| = -5$

6 **Estudia el rango de N según los valores del parámetro a:**

$$N = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \end{pmatrix}$$

Buscamos los valores que anulen el determinante formado por las tres primeras filas y las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^3 + 1 + 1 - (a+1) - (a+1) - (a+1) =$$

$$= (a+1)^3 - 3(a+1) + 2 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 3a - 3 + 2 = a^3 + 3a^2 = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = -3 \end{cases}$$

- Si $a = 0 \rightarrow N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

  Las tres primeras filas son iguales y la 4.ª son ceros $\rightarrow ran(N) = 1$

- Si $a = -3 \rightarrow N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

  Buscamos algún menor de orden 3 distinto de cero:

  $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -3 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 9 = -27 \neq 0 \rightarrow ran(N) = 3$$

  (1) Sacamos -3 como factor común de la 3.ª columna.

- Si $a \neq 0 \rightarrow ran(N) = 3$

7 **Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} t & -1 & 4 \\ 3 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

a) Determina para qué valores de t la matriz A es regular.

b) Para $t = 1$, halla la matriz X que verifica $AXA^{-1} = B$ siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{vmatrix} t & -1 & 4 \\ 3 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -1 & 4+t \\ 3 & t & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 4+t \\ t & 3 \end{vmatrix} = -(-3 - 4t - t^2) = t^2 + 4t + 3 = 0 \rightarrow t = -1,\ t = -3$

A tiene inversa si $t \neq -1$ y $t \neq -3$.

b) $AXA^{-1} = B \rightarrow X = A^{-1}BA$

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & -1 & 4 \\ 5 & 3 & 20 \\ 1 & -1 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/8 & -1/8 & 1/2 \\ 5/8 & 3/8 & 5/2 \\ 1/8 & -1/8 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 9/8 & -1/8 & 1/2 \\ 5/8 & 3/8 & 5/2 \\ 1/8 & -1/8 & 3/2 \end{pmatrix}$$