

Ejercicios y problemas resueltos

Página 51

1. Matrices traspuestas

Hazlo tú. Comprueba que: $(A + B)^t C^t = A^t \cdot C^t + B^t \cdot C^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^t = \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^t C^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot C^t + B^t \cdot C^t = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido el mismo resultado, luego la igualdad es cierta.

2. Cálculo de los elementos de una matriz

Hazlo tú. Dada la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, calcula a para que $X^2 - X = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

$$X^2 - X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a-1) & -1 \\ 0 & a(a+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a(a-1) & -1 \\ 0 & a(a+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a(a-1) = 12 \\ a(a+1) = 20 \end{cases} \rightarrow a = 4$$

3. Operaciones con matrices

Hazlo tú. Halla los valores de a para los cuales $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $X^2 - 3X + 2I = 0$.

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X^2 - 3X + 2I = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 3a + 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 - 3a + 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow a_1 = 2, a_2 = 1$$

5. Matrices conmutables

Hazlo tú. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtén todas las matrices B que conmutan con ella.

La matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ha de verificar $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ c = c \\ d = 2c+d \end{array} \right\}$$

De la 1.^a ecuación y de la 4.^a ecuación obtenemos $c = 0$.

De la 2.^a ecuación obtenemos $a = d$.

Por tanto, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Página 53

6. Matriz inversa de sí misma

Hazlo tú. Prueba que si $A^2 = A + I$, entonces A es invertible (invertible es sinónimo de regular).

$$A^2 = A + I$$

$A^2 - A = I \rightarrow A(A - I) = I \rightarrow A - I$ es la inversa de A , luego A es invertible.

7. Ecuación con matrices

Hazlo tú. Halla la matriz X que cumple $AXA = 2BA$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Sea } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

En la ecuación $AXA = 2BA$ multiplicamos en los dos miembros por A^{-1} a la izquierda y a la derecha:

$$AXA = 2BA \rightarrow X = A^{-1} \cdot 2BA \cdot A^{-1} \rightarrow X = 2A^{-1}BA = 2A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

9. Despejar una matriz multiplicando por las inversas de otras dos

Hazlo tú. Halla la matriz X que verifica $AXB = A + B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Multiplicamos en los dos miembros de la ecuación $AXB = A + B$ por A^{-1} a la izquierda y por B^{-1} a la derecha:

$$AXB = A + B \rightarrow X = A^{-1}(A + B)B^{-1} = (A^{-1}A + A^{-1}B)B^{-1} = (I + A^{-1}B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}BB^{-1} \rightarrow X = B^{-1} + A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

10. Ecuación matricial: sacar factor común

Hazlo tú. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que verifica:

$$AX - A = B - C$$

$$AX - A = B - C \rightarrow A(X - I) = B - C$$

Multiplicamos en los dos miembros por A^{-1} a la izquierda:

$$X - I = A^{-1}(B - C) \rightarrow X = I + A^{-1}(B - C)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B - C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

11. Potencia de una matriz

Hazlo tú. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}; \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

12. Rango de una matriz

Hazlo tú. Estudia el rango de la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{pmatrix}$$

según los distintos valores de m .

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - m \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-m & 2-2m \\ 0 & m & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)/(1-m) \\ (3.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & m & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - m \cdot (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2-2m \end{pmatrix}$$

Si $m = -1 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$ porque las dos primeras filas son L.I. y la tercera es una fila de ceros.

Si $m \neq -1 \rightarrow \text{ran}(M) = 3$.

Ejercicios y problemas guiados

Página 56

1. Matriz inversa igual a traspuesta

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular los valores de a y b para que la matriz inversa de A coincida con su traspuesta.

$$A^{-1} = A^t \rightarrow AA^{-1} = AA^t \rightarrow I = AA^t$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a^2=1 \\ ab=0 \\ b^2+1=1 \end{matrix} \right\} a = \pm 1, b = 0$$

2. Ecuación con matrices

Calcular x , y , z tales que:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2+1 & x+yz \\ x+yz & x^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y^2+1=5 \\ x+yz=0 \\ x^2+z^2=5 \end{matrix} \right\} \rightarrow y = \pm 2$$

• Si $y = 2$:

$$\left. \begin{matrix} x+2z=0 \\ x^2+z^2=5 \end{matrix} \right\} \rightarrow x = 2, z = -1; x = -2, z = 1$$

• Si $y = -2$:

$$\left. \begin{matrix} x-2z=0 \\ x^2+z^2=5 \end{matrix} \right\} \rightarrow x = -2, z = -1; x = 2, z = 1$$

Soluciones: $x_1 = 2, y_1 = 2, z_1 = -1$

$$x_2 = -2, y_2 = 2, z_2 = 1$$

$$x_3 = -2, y_3 = -2, z_3 = -1$$

$$x_4 = 2, y_4 = -2, z_4 = 1$$

3. Ecuación matricial

Determinar la matriz X que verifique $AXA - B = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y 0 la matriz nula de orden 2.

$$AXA - B = 0 \rightarrow AXA = B \rightarrow X = A^{-1}BA^{-1}$$

Hallamos la inversa de A :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ 3 \cdot (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a)/3 \\ -(2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Rango de una matriz

Estudiar el rango de la matriz M según los valores del parámetro t .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8 - 3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8 - 3t & 3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t - 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 - 3t & 0 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 3 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & t - 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La tercera fila es L.D. de las otras dos, luego el rango no es 3.

Las dos primeras filas son L.I., independientemente del valor de t , luego $\text{ran}(M) = 2$ para cualquier valor de t .

5. Ecuación con infinitas soluciones

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$.

$$XAX^{-1} = B \rightarrow XA = BX$$

$$\text{Llamamos } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{array}{l} XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} \\ BX = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a - 9c & 8b - 9d \\ 6a - 7c & 6b - 7d \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{Igualando obtenemos un sistema de ecuaciones.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2a = 8a - 9c \\ 2c = 6a - 7c \end{array} \right\} \rightarrow c = \frac{2}{3}a$$

$$\left. \begin{array}{l} -b = 8b - 9d \\ -d = 6b - 7d \end{array} \right\} \rightarrow b = d$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} a & b \\ (2/3)a & b \end{pmatrix}$$

De todas las posibles soluciones, podemos tomar $a = 3$ y $b = 1$, y obtenemos $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 57

Para practicar

Operaciones con matrices. Matriz inversa

1 Efectúa, si es posible, las siguientes operaciones:

$$A \cdot B \quad B \cdot D \quad 3B - 2C \quad B \cdot C \quad D \cdot D^t$$

$$\text{siendo: } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{(3 \times 2)} \cdot B_{(2 \times 4)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & -6 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{(2 \times 4)} \cdot D_{(4 \times 1)} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$3B - 2C = 3 \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -10 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$B_{(2 \times 4)} \cdot C_{(2 \times 4)} \rightarrow$ No se pueden multiplicar.

$$D_{(4 \times 1)} \cdot D^t_{(1 \times 4)} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (5 \quad -3 \quad 1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 25 & -15 & 5 & 10 \\ -15 & 9 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

calcula:

- a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) B^{-1} d) $(A + B)(A - B)$
 e) $A^2 - B^2$ f) $(A + B)^2$ g) $A^2 + B^2 + 2AB$

$$\text{a) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) + (1/2) \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1/2 \cdot (1.^a) \\ (-1/2) \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Por tanto, } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$d) (A+B)(A-B) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 20 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f) (A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}$$

$$g) A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 15 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 2 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$$

3 Dada la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A+I)^2 = \mathbf{0}$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I .

$$A+I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \quad (A+I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I :

$$(A+I)^2 = \mathbf{0} \rightarrow (A+I) \cdot (A+I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \rightarrow A^2 = -2A - I$$

4 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, averigua cuál de las siguientes matrices es su inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad M \text{ no es inversa de } A.$$

$$A \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad N \text{ es la inversa de } A.$$

5 Halla las matrices inversas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad |B| = -4 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}; \quad |C| = 1 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6 a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula.

b) Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

7 a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 3.

b) Utiliza la igualdad anterior para calcular A^4 .

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} \\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A^2 = 2A - I$$

b) Calculamos A^4 :

$$\begin{aligned} A^4 &= (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 = \\ &= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I = \\ &= 4 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8 Dada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta

igualdad para obtener A^{10} .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 = -I$$

Por tanto:

$$A^4 = -I \cdot A = -A$$

$$A^5 = -A \cdot A = -A^2$$

$$A^6 = -A^2 \cdot A = -A^3 = I$$

$$A^7 = A$$

$$A^{10} = A^7 \cdot A^3 = A \cdot (-I) = -A$$

Rango de una matriz

9 Estudia el rango de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 12 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 6 \cdot (3.^a) - 9 \cdot (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 2$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(E) = 3$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(F) = 3$$

10 Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A .

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B .

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \\ (4.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \\ (4.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

11 Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro m :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -m \\ 4 & 10 & m^2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 2m & m-1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 0 & m^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$$

$$\bullet A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & m-4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$$

Si $m \neq -1 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$

Si $m = -1 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

$$\bullet B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -m \\ 4 & 10 & m^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 4 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -m-2 \\ 0 & 6 & m^2-4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -m-2 \\ 0 & 0 & m^2-m-6 \end{pmatrix}$$

$$m^2 - m - 6 = 0 \rightarrow m = 3, m = -2$$

Si $m \neq 3$ y $m \neq -2 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$

$$\text{Si } m = 3, \text{ la matriz transformada es } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$\text{Si } m = -2, \text{ la matriz transformada es } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$\bullet C = \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 2m & m-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 0 & -m-3 \end{pmatrix}$$

Si $m = 0$, obtenemos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 1$

Si $m = -1$, obtenemos $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 2$

Si $m = -3$, obtenemos $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 1$

En cualquier otro caso, $\text{ran}(C) = 2$.

Es decir: si $m = 0$ o $m = -3$, $\text{ran}(C) = 1$ y si $m \neq 0$ o $m \neq -3$, $\text{ran}(C) = 2$.

$$\bullet D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 0 & m^2-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m^2+1 \end{pmatrix}$$

La tercera fila nunca es una fila de ceros.

Si $m \neq 0 \rightarrow \text{ran}(D) = 3$

Si $m = 0 \rightarrow \text{ran}(D) = 2$

$$\bullet E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2m-1 & -2m+1 \end{pmatrix}$$

Si $m \neq \frac{1}{2} \rightarrow \text{ran}(E) = 2$

Si $m = \frac{1}{2} \rightarrow \text{ran}(E) = 1$

$$\bullet F = \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1/m) \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow$$

Si $m \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 0 & m - \frac{1}{m} \end{pmatrix}$

Miramos las filas.

Si $m = 2 \rightarrow \text{ran}(F) = 2$

$m - \frac{1}{m} = 0 \rightarrow m = -1, m = 1$

Si $m = 1 \rightarrow \text{ran}(F) = 2$

Si $m = -1 \rightarrow \text{ran}(F) = 2$

Si $m = 0$, obtenemos $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(F) = 3$

Si $m \neq 2, m \neq 1$ y $m \neq -1 \rightarrow \text{ran}(F) = 3$

■ Ecuaciones con matrices

12 Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B + B^2$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

13 Resuelve el siguiente sistema dado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{cases} \begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$$

Sumando:

$$4x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{-5}{4}; y = \frac{-7}{4}$$

14 Halla dos matrices A y B tales que:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \quad -A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$-2A + 10B = \begin{pmatrix} 18 & -4 & 32 \\ 34 & 2 & -20 \\ 18 & 10 & 26 \end{pmatrix} \quad \text{Multiplicamos por 2 la 2.ª ecuación.}$$

$$13B = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 39 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 13 & 39 \end{pmatrix} \quad \text{Sumamos miembro a miembro.}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Multiplicamos por } \frac{1}{13}.$$

Despejamos A en la 2.ª ecuación:

$$A = 5B - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 20 & 5 & -10 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

15 Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, halla dos matrices X e Y que verifiquen estas

condiciones:

$$X - 2M = 3N$$

$$M + N - Y = I$$

$$X = 3N + 2M = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Y = M + N - I = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

16 Calcula una matriz X que conmute con la matriz A , esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X = X \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+c=a \\ b+d=a+b \\ d=c+d \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow c=0 \\ \rightarrow a=d \\ \rightarrow c=0 \end{array}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

17 Considera las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula B^{-1} por el método de Gauss.

b) Halla X tal que $BX - A = C^t$.

c) Determina la dimensión de una matriz M para poder calcular AMC .

d) ¿Cuál debe ser la dimensión de N para que $C^t N$ sea una matriz cuadrada?

$$\text{a) } B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a)/2 \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } BX - A = C^t \rightarrow BX = C^t + A \rightarrow X = B^{-1}(C^t + A)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3/2 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A_{(2 \times 3)} M_{(m \times n)} C_{(3 \times 2)}$$

M debe tener dimensión 3×3 .

$$\text{d) } C^t_{(2 \times 3)} N_{(m \times n)} = M_{(2 \times 2)}$$

N debe tener dimensión 3×2 .

18 Sea la siguiente ecuación matricial $AX - B + C = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A^{-1} aplicando la definición.

b) Resuelve la ecuación.

$$a) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4a+c & 4b+d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4a+c=1 \\ 4b+d=0 \\ -a=0 \\ -b=1 \end{array} \right\} \rightarrow a=0, b=-1, c=1, d=4 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b) AX - B + C = 0 \rightarrow AX = B - C \rightarrow X = A^{-1}(B - C)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

19 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula A^{-1} .

b) Halla la matriz X que verifique $AX + 2A = I$.

$$a) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) AX + 2A = I \rightarrow AX = I - 2A \rightarrow X = A^{-1}(I - 2A)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

20 Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Despeja la matriz X en la ecuación $XA - B = XC$.

b) Calcula X .

$$a) XA - B = XC \rightarrow XA - XC = B \rightarrow X(A - C) = B \rightarrow X = B(A - C)^{-1}$$

$$b) X = B(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)/(-2) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array} \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

21 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$:

a) Calcula las matrices X e Y que verifiquen $2X - Y = A$ y $X - 3Y = B$.

b) Halla la matriz Z tal que $B + ZA - B^t = 3I$ donde I es la matriz unidad de orden 2.

$$a) \begin{cases} 2X - Y = A \\ X - 3Y = B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow{\substack{(1.\cdot) \\ -2.\cdot(2.\cdot)}} \begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ -2X + 6Y = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 18 & -10 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sumamos:

$$5Y = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 18 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow 5Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la segunda ecuación:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Las matrices solución son } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Despejamos Z de la ecuación:

$$ZA = 3I + B^t - B$$

Se podrá despejar Z si A se puede invertir.

$$\det(A) = 1 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Z = \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 34 & 21 \end{pmatrix}$$

22 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^2 .

b) Determina x e y para que $A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & -x - y \\ x + y & y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} x^2 - 1 & -x - y \\ x + y & y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x + 1 \\ -x - y = -2 \\ x + y = 2 \\ y^2 - 1 = -1 \end{cases} \rightarrow y = 0, x = 2$$

Para resolver

23 Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) ¿Para qué valores de m existe B^{-1} ? Para $m = 1$, calcula B^{-1} .

b) Para $m = 1$ halla la matriz X tal que $X \cdot B + C = D$.

a) Calculamos la inversa de B :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Podemos conseguir I a la izquierda solo si $m \neq 0$, luego existe B^{-1} si $m \neq 0$.

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)/m \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/m & 1/m \end{array} \right)$$

Calculamos B^{-1} para $m = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $X \cdot B + C = D \rightarrow X \cdot B = D - C \rightarrow X = (D - C)B^{-1}$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

24 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ e I (matriz unidad de orden 3):

a) Calcula las matrices $(A - I)^2$ y $A(A - I)$.

b) Justifica que la matriz A es invertible.

c) Comprueba que no existe la matriz inversa de $A - I$.

d) Determina el valor del parámetro real λ para que se verifique $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$.

$$a) A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

b) En el apartado anterior hemos visto que:

$$A - I = A(A - I) \rightarrow A - I = A^2 - A \rightarrow -A^2 + 2A = I \rightarrow A(-A + 2I) = I$$

Por lo tanto, A es invertible y su inversa es $(-A + 2I)$.

c) Llamamos $B = A - I$.

$$B^2 = \mathbf{0}$$

Si B fuera invertible, $B^2 \cdot B^{-1} = \mathbf{0} \cdot B^{-1} = \mathbf{0}$

Además, cualquier matriz cumple que $B^2 \cdot B^{-1} = B \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot I = B$

Tendríamos entonces que $\left. \begin{array}{l} B^2 \cdot B^{-1} = \mathbf{0} \\ B^2 \cdot B^{-1} = B \end{array} \right\} \rightarrow B = \mathbf{0}$, lo cual es falso.

Por tanto, $B = A - I$ no es invertible.

d) Según el resultado del apartado b), $A^{-1} = -(A - 2I)$.

Por tanto, $\lambda = -1$.

25 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, halla la matriz X tal que $XA + A^t = 2I$.

$$XA + A^t = 2I \rightarrow XA = 2I - A^t \rightarrow X = (2I - A^t)A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Página 59

26 Calcula A^n y B^n siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así, } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Lo probamos por inducción:}$$

Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

27 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^2, A^3, \dots, A^{128} .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

28 Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow k=1$$

29 Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(M) = 3 \text{ para cualquier valor de } k$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1+2k=0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$$

• Si $k = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{ran}(N) = 2$

• Si $k \neq -\frac{1}{2} \rightarrow \text{ran}(N) = 3$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (3.^a) : 4 \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

• Si $k = -2 \rightarrow \text{ran}(P) = 1$

• Si $k \neq -2 \rightarrow \text{ran}(P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

• Si $k = 2 \rightarrow \text{ran}(Q) = 2$

• Si $k \neq 2 \rightarrow \text{ran}(Q) = 3$

30 Calcula una matriz X que conmute con la matriz A , esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Después, calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{ han de ser iguales.}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+c=a \\ b+d=a+b \\ d=c+d \end{array} \right\} \begin{array}{l} c=0 \\ d=a \\ c=0 \end{array} \left. \right\} X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

31 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determina la matriz X que verifica $AXA = 2BA$.

$$AXA = 2BA \rightarrow X = A^{-1}(2BA)A^{-1} \rightarrow X = 2A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a)/2 \\ (-1) \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$$

32 Sean A y B las matrices dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a , b , c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Para $a = b = c = 1$, calcula B^{10} .

$$a) A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left. \begin{array}{l} 5a+2c=5a+2b \\ 5b+2c=2a+5b \\ 2a+5c=7c \\ 2b+5c=7c \end{array} \right\} \begin{array}{l} c=b \\ c=a \\ 7c=7c \\ 7c=7c \end{array} \left. \right\} a=b=c$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así, } B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

33 Una matriz cuadrada se llama ortogonal cuando su inversa coincide con su traspuesta.

Calcula x e y para que esta matriz A sea ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; entonces:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25+x^2 & (3/5)y-(3/5)x & 0 \\ (3/5)y-(3/5)x & y^2+9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{9}{25} + x^2 = 1 \\ \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}x = 0 \\ y^2 + \frac{9}{25} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 = \frac{16}{25} \\ y = x \\ y^2 = \frac{16}{25} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \pm \frac{4}{5} \\ y = x \end{array}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = \frac{4}{5}$; $x_2 = -\frac{4}{5}$, $y_2 = -\frac{4}{5}$

34 Halla todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, que satisfacen la ecuación matricial $X^2 = 2X$.

$$X^2 = 2X \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^2 = 2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b(a+c) & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 2a \\ b(a+c) = 2b \\ c^2 = 2c \end{array} \right\} \text{En función de las soluciones de este sistema, obtenemos distintas matrices } X \text{ solución:}$$

$$a = 0, c = 2 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

$$a = 2, c = 0 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = 0, c = 0, b = 0 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = 2, c = 2, b = 0 \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

35 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que verifica la siguiente

relación: $XC + A = C + A^2$

$$XC + A = C + A^2 \rightarrow X = (C + A^2 - A)C^{-1}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \rightarrow A^2 - A = \mathbf{0}$$

$$X = (C + A^2 - A)C^{-1} = CC^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

36 Halla la matriz X que verifica $AX + B = 3X$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$AX + B = 3X \rightarrow AX - 3X = -B \rightarrow (A - 3I)X = -B \rightarrow X = (A - 3I)^{-1}(-B)$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(A - 3I)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ 3 \cdot (2.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} 10 \cdot (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -30 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a)/(-30) \\ (2.^a)/(-10) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/10 & 1/10 \\ 0 & 1 & -1/10 & -3/10 \end{array} \right) \rightarrow (A - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/10 & 1/10 \\ -1/10 & -3/10 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - 3I)^{-1}(-B) = \begin{pmatrix} -3/10 & 1/10 \\ -1/10 & -3/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & 7/5 \end{pmatrix}$$

37 a) Despeja la matriz X en la siguiente igualdad: $AXA + B = B(2A + I)$

b) Calcula la matriz X en el caso de que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $AXA + B = B(2A + I) \rightarrow AXA = B \cdot 2A + B - B = 2BA \rightarrow$

$$\rightarrow AX = 2BAA^{-1} = 2B \rightarrow X = A^{-1} \cdot 2B = 2A^{-1}B$$

b) Calculamos A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

38 Una empresa conservera elabora tres tipos de latas de cangrejo L_1 , L_2 y L_3 . Para ello necesita hojalata, cangrejo, aceite y sal. Dos almacenes se encargan de distribuir el producto a las tiendas. Considera las siguientes matrices:

A: Demanda de los almacenes

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 250 & 100 \end{pmatrix}$$

B: Cantidad de material en gramos por lata

$$B = \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix}$$

El coste, en euros, de cada gramo de material es 0,01 la hojalata; 0,05 el cangrejo; 0,04 el aceite y 0,001 la sal.

a) Escribe la matriz de costes C , de forma que puedas multiplicarla por la matriz de materiales.

b) Calcula e interpreta AB , BC y ABC .

a) $C = \begin{matrix} \text{Hoj.} \\ \text{Can.} \\ \text{Ac.} \\ \text{Sal} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,04 \\ 0,001 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 250 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44\,750 & 19\,000 & 34\,250 & 5\,500 \\ 46\,300 & 20\,100 & 36\,000 & 5\,950 \end{pmatrix}$

La matriz que hemos obtenido, AB , expresa, por filas, la cantidad, en gramos, de cada uno de los materiales necesarios para fabricar todas las latas que demandan los almacenes.

$$BC = \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,04 \\ 0,001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,41 \\ 7,115 \\ 6,06 \end{pmatrix}$$

La matriz BC representa el coste de los materiales utilizados en una unidad de cada tipo de lata L_1 , L_2 , L_3 .

$$ABC = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 250 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 & 30 & 50 & 10 \\ 100 & 50 & 90 & 15 \\ 105 & 40 & 75 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,04 \\ 0,001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,773 \\ 2\,913,95 \end{pmatrix}$$

Este último producto de matrices, ABC , nos indica el coste, en materiales de fabricación, de todas las latas que demanda cada uno de los dos almacenes.

39 En un edificio residencial hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 ventanas grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el número y el tamaño de las ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

$$\text{a) } \begin{matrix} & \text{P} & \text{G} \\ \text{L3} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{L4} & \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{L5} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix}; \begin{matrix} & \text{C} & \text{B} \\ \text{P} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{G} & \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{b) } \begin{matrix} & \text{P} & \text{G} \\ \text{L3} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{L4} & \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{L5} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} \end{matrix}; \begin{matrix} & \text{C} & \text{B} \\ \text{P} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{G} & \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \text{C} & \text{B} \\ \text{L3} & \begin{pmatrix} 20 & 34 \end{pmatrix} \\ \text{L4} & \begin{pmatrix} 26 & 44 \end{pmatrix} \\ \text{L5} & \begin{pmatrix} 32 & 54 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Página 60

40 La tabla adjunta muestra la cantidad de vitaminas A, B y C que posee cada uno de los productos P, Q, R, S por unidad de peso:

$$\begin{matrix} & \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \text{P} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{Q} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{R} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{S} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

a) Queremos elaborar una dieta en la que entren todos los productos, de manera que contenga 20 unidades de vitamina A, 25 de vitamina B y 6 de C. ¿Es posible hacerlo? ¿De cuántas formas?

b) Obtén, en función de la cantidad de Q que entre en la dieta, las cantidades de los otros productos. ¿Entre qué valores habría de estar la cantidad de producto Q?

a) Llamamos D a la matriz que indica las cantidades que queremos tomar de cada vitamina:

$$\begin{matrix} & \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ D & = & \begin{pmatrix} 20 & 25 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Llamamos X a las cantidades que debemos tomar de cada alimento:

$$\begin{matrix} & \text{P} & \text{Q} & \text{R} & \text{S} \\ X & = & \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Llamamos M a la matriz que indica la cantidad de vitaminas por producto:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El producto XM indica la cantidad de vitaminas que hemos tomado, luego $XM = D$.

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y+2z+t & 2x+z+t & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 6 \end{pmatrix}$$

Obtenemos un sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 20 \\ 2x + \quad z + t = 25 \\ 2y + \quad t = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 11 - \frac{1}{2}\lambda, y = 3 - \frac{1}{2}\lambda, z = 3, t = \lambda$$

Es un sistema compatible indeterminado, luego sí es posible hacerlo y hay infinitas formas de conseguirlo.

b) Si hacemos $y = \lambda$, obtenemos: $x = \lambda, y = \lambda, z = 3, t = 6 - 2\lambda$.

Como las cantidades no pueden ser negativas, ha de ser $0 \leq \lambda \leq 3$.

41 a) Comprueba que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 2A - I$, donde I es la matriz identidad, entonces A es invertible. ¿Cuál es la expresión de A^{-1} ?

b) Utiliza el apartado anterior para calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $A^2 = 2A - I \rightarrow A^2 - 2A = -I \rightarrow -A^2 + 2A = I \rightarrow A(-A + 2I) = I$

Por tanto, A es invertible y $A^{-1} = -A + 2I$.

b) Comprobamos que $A^2 = 2A - I$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Puesto que $A^2 = 2A - I$, por el apartado anterior, A es invertible y su inversa es:

$$A^{-1} = -A + 2I = - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

42 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X que verifique la ecuación $XA + A = A^{-1}$.

$$XA + A = A^{-1} \rightarrow XA = A^{-1} - A \rightarrow X = (A^{-1} - A)A^{-1} = (A^{-1})^2 - I$$

De otra forma:

$$(X + I)A = A^{-1} \rightarrow (X + I) = (A^{-1})^2 \rightarrow X = (A^{-1})^2 - I$$

Calculamos A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$X = (A^{-1})^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuestiones teóricas

43 Justifica por qué no es cierta la igualdad:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$

cuando A y B son dos matrices cualesquiera.

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Para que la igualdad fuera cierta, tendría que ser $AB = BA$; y, en general, no es cierto para dos matrices cualesquiera.

44 Sea A una matriz de dimensión 2×3 .

a) ¿Existe una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz de una sola fila?

b) ¿Y para $B \cdot A$?

Pon un ejemplo para cada caso.

a) No; $A \cdot B$ tendrá 2 filas necesariamente. Por ejemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos que: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Sí; si tomamos una matriz de dimensión 1×2 (ha de tener dos columnas para poder multiplicar $B \cdot A$), el resultado tendrá una sola fila. Por ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = (1 \ 2), \text{ entonces } B \cdot A = (5 \ 2 \ 0).$$

45 Sean A y B dos matrices cuadradas de igual orden. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño, simétricas, su producto, $A \cdot B$, no tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ no es simétrica.}$$

46 ¿Es posible encontrar una matriz A no nula tal que A^2 sea la matriz nula?

En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

47 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, prueba que se verifica $A^3 + I = 0$ y utiliza esta igualdad para obtener A^{10} .

* Haz $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ y ten en cuenta que $A^3 = -I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \rightarrow A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

48 Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (A es una matriz diagonal). Prueba que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}, \text{ su producto es } A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix},$$

que también es una matriz diagonal.

49 Definimos la *traza* de una matriz cuadrada A de orden 2 como $tr(A) = a_{11} + a_{22}$. Prueba que si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2, entonces $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \text{ entonces:}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow tr(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow tr(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Por tanto, $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

50 ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta y pon ejemplos.

a) Si A es una matriz 2×2 cuyo rango es 2, su rango no varía si le añadimos una fila o una columna.

b) Si $X - AX = B$ entonces $X = (I - A)^{-1}B$.

c) Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $(A + I)^2 = 6I$.

d) Si $AB = BA$ entonces $(AB)^t = (BA)^t$.

e) Si a una matriz de 3 filas y 3 columnas cuyo rango es 3 le quitamos una fila y una columna, entonces su rango será 2.

f) En una matriz antisimétrica ($A^t = -A$), los elementos de la diagonal principal son todos 0.

g) El rango de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2 - 1 \end{pmatrix}$ es 3 si $k = 0$.

h) Si A es una matriz regular y $(B - C)A = 0$ (matriz nula), podemos asegurar que $B = C$.

a) Verdadero. No varía, puesto que la matriz que obtenemos tiene, como máximo, dos filas o dos columnas, luego su rango no puede ser mayor que dos. Por otra parte, como la nueva matriz contiene a A , el rango tiene que ser ≥ 2 , es decir, el rango de la nueva matriz es 2.

b) Verdadero. $X - AX = B \rightarrow (I - A)X = B$. Multiplicando por $(I - A)^{-1}$ a la izquierda, tenemos la expresión final para calcular X .

$$\text{c) Verdadero. } (A + I)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6I$$

d) Verdadero. $AB = BA$. Como las dos matrices, AB y BA , son la misma, su traspuesta también será igual.

e) Falso. Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3. Si quitamos la última fila y la última columna,

obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene rango 1.

f) Verdadero, porque $a_{ii} = -a_{ii} \rightarrow 2a_{ii} = 0 \rightarrow a_{ii} = 0$.

$$g) M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 4 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & -5 & -10 & k^2 - 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & k^2 - 6 \end{pmatrix}$$

La afirmación es falsa, pues para que $\text{ran}(M) = 3$, debe ser $k \neq \pm \sqrt{6}$.

h) Verdadero. Como A es regular, podemos multiplicar por A^{-1} a la derecha:

$$(B - C)AA^{-1} = \mathbf{0}A^{-1} \rightarrow B - C = \mathbf{0} \rightarrow B = C$$

Para profundizar

51 Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.

a) Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que $A \cdot B = A \cdot C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) ¿Qué condición debe cumplir la matriz A para que de $A \cdot B = A \cdot C$ se pueda deducir que $B = C$?

a) Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C$, pero $B \neq C$.

b) Debe existir A^{-1} .

52 a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = \mathbf{0}$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq \mathbf{0}$ tal que $AB + BA = \mathbf{0}$.

a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$$AB + BA = \mathbf{0} \rightarrow A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \rightarrow B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \rightarrow BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ a + d = 0 \\ a + d = 0 \\ 2b - c + 3d = 0 \end{array} \rightarrow d = -a$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$

Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

53 Despeja la matriz X en la igualdad $(X+A)^2 = X^2 + XA + I_2$ y obtén X en el caso $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} (X+A)^2 &= X^2 + XA + I \rightarrow (X+A)(X+A) = X^2 + XA + I \rightarrow \\ &\rightarrow X^2 + XA + AX + A^2 = X^2 + XA + I \rightarrow \\ &\rightarrow AX + A^2 = I \rightarrow AX = I - A^2 \rightarrow X = A^{-1}(I - A^2) \end{aligned}$$

Calculamos A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)/2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}(I - A^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

54 Demuestra que si A es una matriz regular, al despejar X en la ecuación $XA^2 + BA = A^2$ se obtiene $X = I - BA^{-1}$.

$$XA^2 + BA = A^2 \rightarrow XA^2 - A^2 = -BA \rightarrow (X - I)A^2 = -BA$$

Multiplicamos por A^{-1} a la derecha (A^{-1} existe por ser A regular):

$$(X - I)A = -B \rightarrow X - I = -BA^{-1} \rightarrow X = -BA^{-1} + I \rightarrow X = I - BA^{-1}$$

55 Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de I y de $-I$, cuya inversa coincida con su traspuesta.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = A^t \rightarrow A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t \rightarrow I = A \cdot A^t$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Buscamos matrices que verifiquen estas condiciones. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos que $A^{-1} = A^t$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^t$$

56 Obtén la forma general de una matriz de orden 2 que sea antisimétrica.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. A \text{ es antisimétrica si } A^t = -A.$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-c \\ d=0 \end{cases}$$

$$A \text{ debe ser de la forma } A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

57 Una matriz cuadrada es *mágica de suma k* cuando la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales es, en todos los casos, igual a k . ¿Cuánto vale k si una matriz mágica es antisimétrica? Halla todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.

- Hemos visto en el ejercicio anterior que, en una *matriz antisimétrica*, los elementos de la diagonal principal son ceros. Por tanto, si la matriz es *antisimétrica*, $k = 0$.
- Buscamos las matrices *mágicas antisimétricas de orden 3*: (sabemos que, en este caso, la suma ha de ser cero).

Veamos cómo es una *matriz antisimétrica de orden 3*:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

A será *antisimétrica* si $A^t = -A$; es decir:

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a=-a & b=-d & c=-g \\ d=-b & e=-e & f=-h \\ g=-c & h=-f & i=-i \end{cases}$$

Luego, una matriz *antisimétrica de orden 3* es de la forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$

Para que A sea *mágica*, ha de tenerse que:

$$\left. \begin{array}{l} b+c=0 \\ -b+f=0 \\ -c-f=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -b+c=0 \\ b-f=0 \\ c+f=0 \end{array}, \text{ es decir: } \begin{cases} c=-b \\ f=b \end{cases}$$

Por tanto, las *matrices mágicas antisimétricas de orden 3* son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

58 Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 0$.

Una matriz simétrica de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ (pues $A = A^t$).

Para que sea mágica con $k = 0$, ha de ser:

$$\begin{cases} a+b+c & =0 \\ b & +d+e =0 \\ c & +e+f =0 \\ a & +d+f =0 \\ 2c+d & =0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \\ (5.^a) \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (2.^a) \\ (5.^a) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \\ (5.^a) - 2 \cdot (3.^a) \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) / 2 \\ (5.^a) + (4.^a) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} a+b+c & =0 \rightarrow a=-b-c=-f \\ b & +d+e =0 \rightarrow b=-e=f \\ c & +e+f =0 \rightarrow c=0 \\ d & +e+f =0 \rightarrow e=-f \\ 3d & =0 \rightarrow d=0 \end{cases}$$

Por tanto, una matriz mágica simétrica de orden 3 con $k = 0$, es de la forma $A = \begin{pmatrix} -f & f & 0 \\ f & 0 & -f \\ 0 & -f & f \end{pmatrix}$, con $f \in \mathbb{R}$.

59 Obtén todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 para $k = 3$.

Una matriz simétrica de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$.

Para que sea mágica con $k = 3$, ha de ser:

$$\begin{cases} a+b+c & =3 \\ b & +d+e =3 \\ c & +e+f =3 \\ a & +d+f =3 \\ 2c+d & =3 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \\ (5.^a) \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (2.^a) \\ (5.^a) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \\ (5.^a) - 2 \cdot (3.^a) \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) / 2 \\ (5.^a) + (4.^a) \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} a+b+c & =3 \rightarrow a=3-b-c=3-f-1=2-f \\ b & +d+e =3 \rightarrow b=3-d-e=3-1-2+f=f \\ c & +e+f =3 \rightarrow c=3-e-f=3-2+f-f=1 \\ d & +e+f =3 \rightarrow e=3-d-f=3-1-f=2-f \\ 3d & =3 \rightarrow d=1 \end{cases}$$

Por tanto, una *matriz mágica simétrica de orden 3 con $k = 3$* , es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 2-f & f & 1 \\ f & 1 & 2-f \\ 1 & 2-f & f \end{pmatrix}, \text{ con } f \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, con $f = 0$, queda: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

60 Sea A una matriz cuadrada que verifica la igualdad $A^2 - 2A = 3I$.

a) Demuestra que A es invertible y expresa A^{-1} en función de A e I .

b) Expresa A^3 como combinación lineal de A e I .

c) Halla todas las matrices simétricas de orden 2 que verifican $A^2 - 2A = 3I$.

a) $A^2 - 2A = 3I \rightarrow A(A - 2I) = 3I \rightarrow A \cdot \frac{1}{3}(A - 2I) = I$

Por tanto, A es invertible y su inversa es $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I)$.

b) $A^2 = 3I + 2A$

$$A^3 = (3I + 2A)A = 3A + 2A^2 = 3A + 2(3I + 2A) = 7A + 6I$$

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b(a+c) \\ b(a+c) & b^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b(a+c) \\ b(a+c) & b^2 + c^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a + b^2 & b(a+c-2) \\ b(a+c-2) & b^2 + c^2 - 2c \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 3 \\ b(a+c-2) = 0 \\ b^2 + c^2 - 2c = 3 \end{cases}$$

• Si $b = 0$, obtenemos $\begin{cases} a^2 - 2a = 3 \\ c^2 - 2c = 3 \end{cases}$ con las soluciones siguientes:

$$a = 3, b = 0, c = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$a = -1, b = 0, c = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$a = 3, b = 0, c = 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$a = -1, b = 0, c = 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

• Si $b \neq 0$, obtenemos el sistema $\begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 3 \\ b(a+c-2) = 0 \\ b^2 + c^2 - 2c = 3 \end{cases}$ con las soluciones:

$$a = 2 - c, b = \sqrt{-(c+1)(c-3)}; a = 2 - c, b = -\sqrt{-(c+1)(c-3)}$$

En estos casos, ha de ser $-1 \leq c \leq 3$, y las matrices que verifican la condición pedida son:

$$A = \begin{pmatrix} 2-c & \sqrt{-(c+1)(c-3)} \\ \sqrt{-(c+1)(c-3)} & c \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2-c & -\sqrt{-(c+1)(c-3)} \\ -\sqrt{-(c+1)(c-3)} & c \end{pmatrix}$$

61 Estudia para qué valores de x , la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ coincide con su opuesta.

$$A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \rightarrow -A = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$$

Si $-A = A^{-1} \rightarrow A(-A) = I$

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - x^2 & 0 \\ 0 & 10 - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 10 - x^2 = 1 \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

Autoevaluación

Página 61

1 Estudia el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \rightarrow (3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \rightarrow (1.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (a+1) \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 3-a \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } a = 3 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\text{Si } a \neq 3 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

2 Si A es una matriz cuadrada de orden 3, C una matriz de dimensión 3×2 y D una matriz cuadrada de orden 2, ¿qué dimensión debe tener la matriz B para que la ecuación matricial $AB = CD$ tenga sentido?

$$A_{(3 \times 3)} B_{(m \times n)} = C_{(3 \times 2)} D_{(2 \times 2)} = M_{(3 \times 2)}$$

Luego B debe ser una matriz de dimensión 3×2 .

3 Demuestra que si A es una matriz cuadrada de orden 2 entonces $(A^t)^2 = (A^2)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

$$(A^2)^t = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

$$(A^t)^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

Ambas matrices, $(A^2)^t$ y $(A^t)^2$ coinciden.

4 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5n & 1 \end{pmatrix}$$

5 Determina todas las matrices A tales que $AX = XA$, siendo $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a+b = a+c \\ a+b = b+d \\ c+d = a+c \\ c+d = b+d \end{array} \right\} \rightarrow a = d, b = c$$

Son todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

6 Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla dos matrices X e Y tales que verifiquen las siguientes ecuaciones:

$$X + Y^{-1} = C$$

$$X - Y^{-1} = C^t$$

$$\begin{cases} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{cases}$$

• Sumamos las ecuaciones:

$$2X = C + C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

• Restamos las ecuaciones:

$$2Y^{-1} = C - C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Y^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la inversa de $Y^{-1} \rightarrow (Y^{-1})^{-1} = Y$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) + 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) - (1.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Luego } Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son $X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

7 a) Halla la inversa de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Resuelve la ecuación $2XA + B = A^t$, siendo $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 3 \cdot (2.^a) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) - 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) + (3.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $2XA + B = A^t \rightarrow 2XA = A^t - B \rightarrow 2X = (A^t - B)A^{-1} \rightarrow X = \frac{1}{2}(A^t - B)A^{-1}$

$$X = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

8 Razona si es posible añadir una fila a esta matriz de forma que la nueva matriz tenga rango 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

Si se añade una fila, puede tener, como máximo, rango 3, luego no es posible que la nueva matriz tenga rango 4.

9 Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4 .

$$\begin{matrix} & \text{T} & \text{O} \\ M_1 & \begin{pmatrix} 300 & 200 \end{pmatrix} \\ M_2 & \begin{pmatrix} 400 & 250 \end{pmatrix} \\ M_3 & \begin{pmatrix} 250 & 180 \end{pmatrix} \\ M_4 & \begin{pmatrix} 500 & 300 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1 , el 5% en el M_2 , el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4 .

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$$\begin{matrix} & & & & \text{T} & \text{O} \\ & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ \text{D} & \begin{pmatrix} 0,02 & 0,05 & 0,08 & 0,1 \end{pmatrix} & & & & \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} & & & & \text{D} & \begin{pmatrix} 96 & 60,9 \\ 1354 & 869,1 \end{pmatrix} & \approx & \text{B} & \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1354 & 869 \end{pmatrix} \\ \text{B} & & & & & & & & & \text{B} & & & & & \text{B} & & & & \end{matrix}$$