Integral indefinida

1. Primitiva de una función

Definición: Sea f(x) una función definida en el intervalo (a,b), llamaremos primitiva de la función f(x) a toda función real de variable real, F(x), tal que:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

Hallar primitivas es el proceso inverso de hallar derivadas.

Es decir, si F(x) es una primitiva de f(x), entonces F'(x)=f(x).

Es evidente que primitivas de una función hay infinitas, puesto que si consideramos la función G(x)=F(x)+C con C=cte. también es una primitiva de f(x), G'(x)=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x), y bastará con cambiar la constante para ir obteniendo más primitivas.

Al conjunto formado por todas las funciones primitivas de una función se le denomina "integral indefinida de f(x)" y se le denota por $\int f(x)dx$ (se lee integral indefinida de f(x) diferencial de x)

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad con\ C \in R$$

f(x) se denomina integrando.

Ejemplo 1: Comprobar que $F(x) = x^4 + 6$ es una primitiva de $f(x) = 4x^3$

$$F'(x) = 4x^3 = f(x)$$

Ejemplo 2: Una función F(x) tomo en x=1 el valor 2, se sabe que su derivada es $f(x)=12x^2+6$. Calcular la función.

F(x) es una primitiva de f(x) → $F(x)=4x^3+6x+C$.

Toma el valor 2 para x=1 →F(1)=2 4+6+C=2 → C=-8

Luego $F(x)=4x^3+6x-8$.

1.1 Propiedades de la integral indefinida

- $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \quad con\ k \in R$
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

1.2 Integrales inmediatas

De la propia definición de integral indefinida y de la tabla de derivadas se deduce:

FORMAS SIMPLES	FORMAS COMPUESTAS
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int f(x)^n . f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\|f(x)\| + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{f(x)} . f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} . f'(x) dx = e^{f(x)} + C$
$\int senx dx = -\cos x + C$	$\int f'(x) . senf(x) dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x dx = senx + C$	$\int f'(x) . \cos f(x) dx = senf(x) + C$
$\int tgx dx = -\ln\|\cos x\| + C$	$\int f'(x) . tg(f(x)) dx = -\ln\|\cos f(x)\| + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x \, dx = \int (1 + tg^2 x) dx = tgx + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = tgf(x) + C$
$\int \frac{1}{sen^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = \int (1 + ctg^2 x) dx = -ctgx + C$	$\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)} dx = -ctgf(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = arcsenx + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}} dx = arcsenf(x) + C$
$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = arctgx + C$	$\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx = arctgf(x) + C$

2. Métodos elementales de integración.

2.1 Descomposición

Se basa en las propiedades de las integrales que acabamos de ver. Consiste en descomponer la función f(x) en suma de otras funciones que sepamos integrar.

Ejemplo 3: $\int (3x^2+5x-4)dx = 3\int x^2dx + 5\int xdx - 4\int dx = 3.\frac{x^3}{3} + 5.\frac{x^2}{2} - 4x + C$

Ejemplo 4: $\int \frac{3x^2+5x-4}{x}dx = \int \frac{3x^2}{x}dx + \int \frac{5x}{x}dx - \int \frac{4}{x}dx = 3\int xdx + 5\int dx - 4\int \frac{1}{x}dx = \frac{3x^2}{2} + 5x - 4\ln|x| + C$

Ejemplo 5: $\int tg^2(x)dx = \int (1+tg^2(x)-1)dx = \int (1+tg^2(x))dx - \int dx = tgx - x + C$

2.2 Cambio de variable

En ocasiones, una integral de apariencia difícil se reduce a otra conocida si se cambia adecuadamente la variable de integración. Al final debe darse el resultado en términos de la variable inicial.

Ejemplo 6: $\int \sqrt{5x+3}dx \underset{\substack{t=5x+3 \\ dt=5dx \Rightarrow dx=dt/5}}{=} \int \frac{\sqrt{t}}{5}dt = \frac{1}{5}\cdot\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{15}\cdot t^{\frac{3}{2}} + C =$

$= \frac{2}{15}\cdot(5x+3)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{15}\cdot\sqrt{(5x+3)^3} + C$

Ejemplo 7: $\int e^{3x-5}dx \underset{\substack{3x-5=t \\ 3dx=dt \Rightarrow dx=dt/3}}{=} \int \frac{e^t}{3}dt = \frac{1}{3}\cdot e^t + C = \frac{1}{3}\cdot e^{3x-5} + C$

Resolver las siguientes integrales:

1. $\int (x^3+5x^2-3x+2)dx$
2. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{x} + x^{-2}\right)dx$
3. $\int (e^x + \sqrt{x} + 3\cos x)dx$
4. $\int \left(\sqrt[3]{x} - x^{\frac{-1}{4}} + 1\right)dx$
5. $\int sen2xdx$
6. $\int 2\cdot e^{-2x}dx$
7. $\int \left(-\frac{x}{2}+1\right)^3 dx$
8. $\int \frac{\sqrt{3x+1}}{3}dx$
9. $\int \frac{x^2}{-x^3+1}dx$
10. $\int \frac{2}{(3x-1)^2}dx$
11. $\int \frac{dx}{4+4x^2}$
12. $\int x\cdot\sqrt{5x^2-1}dx$
13. $\int senx\cdot\cos^3 xdx$

14. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

15. $\int \frac{1}{x\ln^3 x}dx$

16. $\int \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$

17. $\int 2\cdot senx\cdot e^{\cos x}dx$

18. $\int \sqrt[3]{7-4senx}\cos xdx$

19. $\int \frac{\sec^2 x}{tg^2 x}dx$

20. $\int\left(\frac{1}{x+5}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

21. $\int\left(\frac{1}{2x+5}+sen2x\right)dx$

22. $\int\left(e^{2x+5}+5^{3x-1}\right)dx$

23. $\int\left(\frac{2}{1-x}+3\cos(2x)\right)dx$

24. $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\sec^2(3x)\right)dx$

25. $\int\left(e^{2x+1}-5sen(3x)\right)dx$

26. $\int\left(2^{5x+1}-3x\cos\left(8x^2-3\right)\right)dx$

27. $\int x\sqrt{x^2+2}dx$

28. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln x}}dx$

2.3 Integración por partes(no para CCSS)

Sean dos funciones en x, u(x) y v(x) por la derivada de un producto $d(u\cdot v)=u\cdot dv+v\cdot du$ de donde:

$u\cdot dv=d(u\cdot v)-v\cdot du$, que integrando obtenemos:

$\int u\cdot dv=\int d(u\cdot v)-\int v\cdot du$ es decir:

$$\boxed{\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du}$$

Ejemplo 8: $\int xsenxdx$ (función trigonométrica o exponencial + polinomio---u=p(x))

$\begin{bmatrix} u=x & dv=senxdx \\ du=dx & v=\int senxdx=-\cos x\end{bmatrix}$ así $\int xsenxdx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+senx+C$

Ejemplo 9: $\int \ln xdx$ (función logarítmica---u=ln(f(x)))

$\begin{bmatrix} u=\ln x & dv=dx \\ du=\frac{dx}{x} & v=x\end{bmatrix}$ así $\int \ln xdx=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C$

Ejemplo 10: $\int xe^x dx$

$\begin{bmatrix} u=x & dv=e^x dx \\ du=dx & v=e^x\end{bmatrix}$ así $\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

Ejemplo 11: $\int 4x^3 \ln x dx$

$$\begin{bmatrix} u = \ln x & dv = 4x^3 dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x^4 \end{bmatrix} \quad \text{así} \quad \int 4x^3 \ln x dx = x^4 \ln x - \int x^4 \frac{dx}{x} = x^4 \ln x - \frac{x^4}{4} + C$$

Ejemplo 12: En ocasiones tenemos que aplicar uno o varios métodos de integración para conseguir la expresión final.

$$\int x^2 e^x dx$$

$$\begin{bmatrix} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2x dx & v = e^x \end{bmatrix} \quad \text{así} \quad I = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2\underbrace{\int x e^x dx}_{I_1}$$

Ahora volvemos a integrar por partes I_1

$$\begin{bmatrix} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix} \Rightarrow I_1 = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

Sustituyendo

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2\underbrace{\int x e^x dx}_{I_1} = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x \left(x^2 - 2x + 2 \right) + C$$

Ejemplo 13: Algunas integrales al reiterar la integración por partes se vuelve a obtener la integral de partida, en cuyo caso se despeja. Habitualmente ocurre en las integrales que contienen funciones trigonométricas y exponenciales.

$$\int e^x \cos 2x dx$$

$$\begin{bmatrix} u = e^x & dv = \cos 2x dx \\ du = e^x dx & v = \dfrac{1}{2} sen 2x \end{bmatrix} \Rightarrow I = \int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x senx}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\int sen2x \cdot e^x dx}_{I_1}$$

Hacemos I_1

$$\begin{bmatrix} u = e^x & dv = sen 2x\, dx \\ du = e^x dx & v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix} \Rightarrow \quad I_1 = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\int e^x \cos 2x dx}_{I} = -\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} I$$

Sustituyendo

$$I = \frac{e^x senx}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{e^x \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} I \right) = \frac{e^x senx}{2} + \frac{e^x \cos 2x}{4} - \frac{1}{4} I \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right) I = \frac{e^x sen2x}{2} + \frac{e^x \cos 2x}{4} \quad \Rightarrow I = \frac{4}{5}\left(\frac{e^x sen2x}{2} + \frac{e^x \cos 2x}{4} \right) + C \quad \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{2e^x sen2x}{5} + \frac{e^x \cos 2x}{5} + C$$

Resolver las siguientes integrales:

29. $\int 2x^2 e^{-x} dx$ $\quad I = \frac{-2x^2-4x-4}{e^x} + C$

30. $\int \left(x^2+1\right)\cdot e^{2x+3} dx$ $\quad I = \frac{\left(2x^2-2x+3\right) e^{2x+3}}{4} + C$

31. $\int x^2 \cos 2x dx$ $\quad I = \frac{(2x^2-1) sen 2x + 2x\cos 2x}{4} + C$

32. $\int \ln(x+1) dx$ $\quad I = (x+1)\ln|x+1| - x + C$

33. $\int (\ln x)^3 dx$ $\quad I = x\ln|x^3| - 3x\ln|x^2| + 6x\ln|x| - 6x + C$

34. $\int \frac{x^3}{3}\ln x dx$ $\quad I = \frac{4x^4\ln|x| - x^4}{48} + C$

35. $\int \arccos x dx$ $\quad I = x\arccos x - \sqrt{-x^2+1} + C$

36. $\int arcsenx dx$ $\quad I = xarcsenx + \sqrt{-x^2+1} + C$

37. $\int arctgx dx$ $\quad I = xarctgx - \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2} + C$

38. $\int xarctgx dx$ $\quad I = \frac{1}{2}\left[\left(x^2+1\right)\cdot arctgx - x\right] + C$

39. $\int e^{arcsenx} dx$ $\quad I = x\cdot e^{arcsenx} + C$

40. $\int e^{-x} senx dx$ $\quad I = \frac{-senx - \cos x}{2e^x} + C$

2.4 Algunas integrales racionales

Denominamos integral racional a las integrales de funciones racionales del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ donde P(x) y Q(x) son polinomios. Para el nivel de nuestro curso solo consideraremos los casos en que el denominador sea un polinomio de grado menor o igual a dos. Los casos inmediatos son:

$$\int f(x)^n . f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$$

Todos los demás casos se reducen en la práctica a estos, es decir la primitiva será con pequeñas variantes una suma de polinomios, logaritmos y arcotangentes.

Partimos que el grado del numerador es menor que el del denominador, en caso contrario se realiza la división.

Ejemplo: $\int \frac{x^4-5x+3}{x^2-1} dx = \int \left(x^2+1\right) dx + \int \frac{4-5x}{x^2-1} dx$

2.4.1 Denominador de grado 1

Si grad(Q(x))=1 y el numerador es un número, todas sus primitivas corresponden a logaritmos.

Ejemplo 14: $\int \frac{7}{3x+5} dx = \frac{7}{3}\int \frac{3}{3x+5} dx = \frac{7}{3}\ln|3x+5| + C$

Si el grado del denominador es menor o igual que el grado del numerador, se divide:

Ejemplo 15: $\int \frac{x^2}{x+1} dx$

Hacemos $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$ luego $\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int (x-1) dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$

2.4.2 Denominador de grado 2

Así nos quedan integrales de la forma $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$

Para realizar estas integrales se convierte la función racional en suma de otros cocientes cuyas integrales sepamos hacer. Para ello se realiza la descomposición factorial del denominador y se calculan sus raíces.

Realizamos la descomposición en fracciones simples.

2.4.2.1 Si tiene dos raíces reales

Si las raíces del denominador son x_1 y x_2, el denominador es $a(x-x_1)(x-x_2)$, y la descomposición en fracciones simples es: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{a(x-x_2)}$ operando y dando valores a la variable obtenemos A y B.

Dan siempre dos logaritmos neperianos.

Ejemplo 16: $\int \frac{2}{x^2-1}dx$

Buscamos las raíces del denominador: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$ luego $x^2-1=(x+1)(x-1)$ hacemos la descomposición en fracciones simples $\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \frac{2}{x^2-1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$

se tiene que cumplir la identidad: $2 = A(x+1)+B(x-1)$ para cualquier nº real, en particular:

- Para x=1 $\Rightarrow$ $2=2A \Rightarrow A=1$
- Para x=-1 $\Rightarrow$ $2=-2B \Rightarrow B=-1$

Con lo que sustituyendo obtenemos:

$$\int \frac{2}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-1}{x+1}dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

Ejemplo 17: $\int \frac{8x}{x^2-4}dx$

$$\frac{8x}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 8x = A(x+2)+B(x-2)$$

- Para x=2 $\Rightarrow 16=4A \Rightarrow A=4$
- Para x=-2 $-16=-4B \Rightarrow B=4$

Sustituyendo $\int \frac{8x}{x^2-4}dx = \int \frac{4}{x-2}dx + \int \frac{4}{x+2}dx = 4\ln|x-2| + 4\ln|x+2| + C$

Por cambio de variable $\int \frac{8x}{x^2-4}dx \underset{\substack{x^2-4=t \\ 2xdx=dt}}{=} \int \frac{4dt}{t} = 4\ln|t|+c = 4\ln|x^2-4|+c$

Ejemplo 18: $\int \frac{8x-21}{x^2-5x+6}dx$

$$\frac{8x-21}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \quad \Rightarrow 8x-21=A(x-3)+B(x-2)$$

- Para x=2 $\Rightarrow \quad -5=-A \quad \Rightarrow \quad A=5$
- Para x=3 $\Rightarrow \quad 3=B$

Sustituyendo $\int \frac{8x-21}{x^2-5x+6}dx=5\int \frac{dx}{x-2}+3\int \frac{dx}{x-3}=5\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C$

Ejemplo 19: $\int \frac{2x^3-4x^2-11x+4}{x^2-2x-8}dx$

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, hacemos la división obteniendo:

$\frac{2x^3-4x^2-11x+4}{x^2-2x-8}=2x+\frac{5x+4}{x^2-2x-8}$ así

$I=\int \frac{2x^3-4x^2-11x+4}{x^2-2x-8}dx=\int 2xdx+\underbrace{\int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}dx}_{I_1}$ ahora calculamos I_1

Hacemos la descomposición en fracciones simples

$$\frac{5x+4}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2} \quad \Rightarrow \quad 5x+4=A(x+2)+B(x-4)$$

- Para x=-2 $\Rightarrow \quad -6=-6B \quad \Rightarrow \quad B=1$
- Para x=4 $\Rightarrow \quad 24=6A \quad \Rightarrow \quad A=4$

Sustituyendo obtenemos $I_1=\int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}dx=\int \frac{4}{x-4}dx+\int \frac{dx}{x+2}$

$$I=\int \frac{2x^3-4x^2-11x+4}{x^2-2x-8}dx=\int 2xdx+\underbrace{\int \frac{5x+4}{x^2-2x-8}dx}_{I_1}=\int 2xdx+\int \frac{4}{x-4}dx+\int \frac{dx}{x+2}=$$

$$=x^2+4\ln|x-4|+\ln|x+2|+C$$

2.4.2.2 Si tiene una raíz doble

Si el denominador tiene una raíz doble su factorización es $a(x-x_1)^2$, y la descomposición en fracciones simples es: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{a(x-x_1)}+\frac{B}{a(x-x_1)^2}$ operando y dando valores a las variables obtenemos A y B.

Dan siempre un logaritmo neperiano y una potencial.

Ejemplo 20: $\int \frac{2x-3}{x^2-2x+1}dx$

El denominador es $x^2-2x+1=(x-1)^2$ por tanto la descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{2x-3}{x^2-2x+1}=\frac{2x-3}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2} \Rightarrow 2x-3=A(x-1)+B$$

- Para x=1 $\Rightarrow -1=B$
- Para x=0 $\Rightarrow -3=-A+B \Rightarrow A=2$

Sustituyendo

$$\int \frac{2x-3}{x^2-2x+1}dx=\int \frac{2x-3}{(x-1)^2}dx=\int \frac{2}{x-1}dx+\int \frac{-1}{(x-1)^2}dx=2\ln|x-1|-\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C=2\ln|x-1|+\frac{1}{(x-1)}+C$$

Ejemplo 21: $\int \frac{3-x}{4x^2+4x+1}dx$

x=-1/2 es una raíz doble del denominador así la descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{3-x}{4x^2+4x+1}=\frac{A}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{B}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{3-x}{4x^2+4x+1}=\frac{A\left(x+\frac{1}{2}\right)+B}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow 3-x=A\left(x+\frac{1}{2}\right)+B$$

- Para x=-1/2 $\Rightarrow 3+\frac{1}{2}=B \Rightarrow B=\frac{7}{2}$
- Para x=0 $\Rightarrow 3=\frac{1}{2}A+B \Rightarrow A=-1$

Sustituyendo $\int \frac{3-x}{4x^2+4x+1}dx=\int -\frac{dx}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\int \frac{\frac{7}{2}}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx=-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{7}{8}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|+\frac{7}{8}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{4}\ln\left|x+\frac{1}{2}\right|-\frac{7}{8\left(x+\frac{1}{2}\right)}+C$$

En estos casos hay otra forma más simple de hacerlos que es poner el denominador como un cuadrado perfecto así $\int \frac{3-x}{4x^2+4x+1}dx=\int \frac{3-x}{(2x+1)^2}dx$

Descomponemos de la siguiente manera:

$$\frac{3-x}{(2x+1)^2}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{(2x+1)^2}=\frac{(2x+1)A+B}{(2x+1)^2} \Rightarrow 3-x=(2x+1)A+B$$

- Para x=-1/2 $\Rightarrow\ -\left(-\frac{1}{2}\right)+3=B\ \Rightarrow\ B=\frac{7}{2}$
- Para x=0 $\Rightarrow\ 3=A+B\ \Rightarrow\ A=\frac{1}{2}$

Sustituyendo $\int\frac{3-x}{4x^2+4x+1}dx=\int\frac{3-x}{(2x+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(2x+1)}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{(2x+1)^2}=\frac{1}{4}\ln|2x+1|-\frac{7}{4(2x+1)}+C$

2.4.2.3 Si no tiene raíces reales (raíces complejas)(no para CCSS)

Si el denominador no tiene raíces reales entonces no se puede realizar la descomposición en fracciones simples. En este caso va a dar siempre al menos un arcotangente, que hay que construir, y en ocasiones también un logaritmo neperiano

Ejemplo 22: $\int\frac{5}{2+4x^2}dx$

$$\int\frac{5}{2+4x^2}dx=5\int\frac{1}{2+4x^2}dx=5\int\frac{1/2}{2/2+(4x^2)/2}dx=\frac{5}{2}\int\frac{1}{1+2x^2}dx=\frac{5}{2}\int\frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2}dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2}dx=\frac{5}{2\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}x)^2}dx=\frac{5}{2\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}x)+C=\frac{5\sqrt{2}}{4}arctg(\sqrt{2}x)+C$$

Ejemplo 23: $\int\frac{2x+5}{x^2-4x+13}dx$

$x^2-4x+13=0\quad no\ tiene\ soluciones\ reales$

$$I=\int\frac{2x+5}{x^2-4x+13}dx=\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx+\int\frac{9}{x^2-4x+13}dx=\ln|x^2-4x+13|+9I_1$$

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2-4x+13}=\int\frac{dx}{(x-2)^2+9}\underset{\substack{\text{dividimos denominador}\\ \text{y numerador por 9}}}{=}\frac{1}{9}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\cdot 3\int\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}dx=\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x-2}{3}\right)$$

$$I=\ln\left(x^2-4x+13\right)+3arctg\left(\frac{x-2}{3}\right)+C$$

Realizar las siguientes integrales:

41.- $\int\frac{x+2}{x^2-x}dx$

42.- $\int\frac{6-2x}{(x+1)^2}dx$

43.- $\int\frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2}dx$

44.- $\int\frac{1-x}{x^2-4x+4}dx$

3. EJEMPLOS DE CÁLCULO DE INTEGRALES

1.-La función f(x)=2x+5 tiene infinitas primitivas que difieren en una constante. ¿Cuál de estas funciones toma el valor 18 para x=2?

Solución:

$$\int (2x+5)\,dx = x^2+5x+C$$

Como toma el valor 18 para x=2 resulta: $2^2+5.2+C=18 \Rightarrow C=4$.

La función buscada es: $F(x)=x^2+5x+4$

2.-Halla una función cuya derivada sea $f(x)=4x^3-7x^2+5x-1$ y que se anule para x=1.

Solución:

Buscamos la integral indefinida de f(x) que es:

$$\int (4x^3-7x^2+5x-1).dx = x^4-\frac{7x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x+C$$

Como se anula para x=1 tenemos: $1^4-\frac{7.1^3}{3}+\frac{5.1^2}{2}-1+C=0$

y se obtiene que C= - 1/6

La función buscada es $F(x)=x^4-\frac{7x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-x-\frac{1}{6}$

3.-Halla la función G tal que G"(x)=6x+1; G(0)=1 y G(1)=0

Solución:

Nos dan la segunda derivada por lo que tenemos que integrar dos veces:

$$G'(x)=\int (6x+1)dx = 3x^2+x+C$$

$$G(x)=\int (3x^2+x+C)dx = x^3+\frac{1}{2}x^2+Cx+D$$

De G(0)=1 resulta: D=1 , (después de sustituir la x por 0.)

De G(1)=0 obtenemos: 1+1/2+C+1=0 ,(después de sustituir la x por 1) por lo que C = -5/2.

La función que buscamos es la siguiente: $G(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1$

4.-Dada la función f(x)=6x halla la primitiva que pasa por el punto A(1,2).

Solución:

Hallamos la integral indefinida: $\int 6x dx = 3x^2 + C$ que es el conjunto de todas sus primitivas.

Ahora buscamos la que pasa por el punto (1,2):

$3.1^2 + C = 2$ lo que indica que C= -1, por tanto, la primitiva buscada es $F(x) = 3x^2 - 1$

5.-Integra las siguientes funciones racionales: (INMEDIATAS O CAMBIO DE VARIABLE)

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx$; **b)** $\int \frac{x-1}{x^2-2x-6} dx$;**c)** $\int \frac{1+2x}{1+x^2} dx$; **d)** $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$

Solución:

a) La primera es inmediata ya que el numerador es exactamente la derivada del denominador, por tanto,

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx = L\left|x^2+x-6\right| + C$$

b) La segunda se resuelve buscando la derivada del denominador:

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x-6} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-6} dx = \frac{1}{2}.L\left|x^2-2x-6\right| + C$$

c) La tercera la descomponemos en dos integrales:

$$\int \frac{1+2x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + L(1+x^2) + C$$

d) La cuarta se resuelve realizando previamente la división. Y podemos realizarla por Ruffini

Hecha la división se obtiene de cociente x+1 y de resto 2

$$\int \frac{x^2+1}{x-1} dx = \int (x+1+\frac{2}{x-1}) dx = \frac{x^2}{2} + x + 2L\left|x-1\right| + C$$

6.-Cálcula las siguientes integrales: (POR PARTES) No CCSS

a) $\int xe^x dx$; **b)** $\int x \operatorname{sen} x dx$; **c)** $\int xLx dx$;

Solución:

Todas ellas se resuelven por partes y la fórmula del método es $\int u.dv = u.v - \int v.du$

a) $I = \int xe^x dx$.

$$\begin{bmatrix} u = x & dv = e^x.dx \\ du = dx & v = e^x \end{bmatrix}$$

$$I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

b) I= $\int x \operatorname{sen} x.dx$

$$\begin{bmatrix} u = x & dv = senx\,dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{bmatrix} \quad I = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

c) $I = \int xLxdx$

$$\begin{bmatrix} u = Lx & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} \quad I = \frac{x^2}{2}.Lx - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}.dx = \frac{x^2}{2}.Lx - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}.Lx - \frac{x^2}{4} + C$$

7.-Calcula las siguientes integrales: (POR PARTES REITERADAMENTE) **No CCSS**

a) $\int x^2 e^x dx$ **;** ***b)*** $\int x^2 \cos 3x dx$

Solución:

Las dos se resuelven aplicando el método de integración por partes dos veces:

a) $\int x^2 e^x dx$

$$\begin{bmatrix} u = x^2 & dv = e^x\,dx \\ du = 2x\,dx & v = e^x \end{bmatrix}$$

$I = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$; $I = x^2 e^x - I_1$ (*) donde $I_1 = \int 2xe^x dx$

Hacemos nuevamente

$$\begin{bmatrix} u = 2x & dv = e^x\,dx \\ du = 2\,dx & v = e^x \end{bmatrix}$$

$I_1 = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x$

Y volviendo nuevamente a la expresión (*) obtenemos el resultado final:

$$I = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

b) $\int x^2 \cos 3x dx$

$$\begin{bmatrix} u = x^2 & dv = \cos 3x\,dx \\ du = 2x\,dx & v = \dfrac{1}{3} sen 3x \end{bmatrix}$$

$I = \frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} 3x - \int \frac{2}{3} x \operatorname{sen} 3x dx = \frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} 3x - I_1$.

Aplicamos nuevamente el método de integración por partes para I_1

$$\begin{bmatrix} u=\frac{2}{3}x & dv=sen3x\,dx \\ du=\frac{2}{3}dx & v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix}$$

$$I_1=\int \frac{2}{3}x\,\text{sen}\,3xdx=-\frac{2}{9}x\cos 3x+\int \frac{2}{9}\cos 3xdx=-\frac{2}{9}x\cos 3x+\frac{2}{27}\int 3\cos 3xdx=$$

$$=-\frac{2}{9}x\cos 3x+\frac{2}{27}\text{sen}\,3x$$

$$I=\frac{1}{3}x^2\,\text{sen}\,3x+\frac{2}{9}x\cos 3x-\frac{2}{27}\text{sen}\,3x+C$$

8.-Resuelve la siguiente integral por partes: $I=\int \cos^2 xdx$ **(CICLÍCA)**No CCSS

Solución:

$$\begin{bmatrix} u=\cos x & dv=\cos x\,dx \\ du=-senx & v=senx \end{bmatrix}$$

$$I=\int \cos^2 xdx=\int \cos x\cos xdx=\text{sen}\,x\cos x+\int \text{sen}^2 xdx$$

$$I=\text{sen}\,x\cos x+\int (1-\cos^2 x)dx$$

$$I=\text{sen}\,x\cos x+\int dx-\int \cos^2 xdx$$

$$I=\text{sen}\,x\cos x+x-I$$

$$2I=\text{sen}\,x\cos x+x$$

$$I=\frac{\text{sen}\,x\cos x+x}{2}+C$$

9.-Calcula por el método más adecuado las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$; ***b)*** $\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}dx$

Solución

a) La primera la resolvemos por un sencillo cambio de variable:

$$x-1=t\Rightarrow dx=dt$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx=\int \frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-1}}{-1}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{x-1}+C$$

b) La segunda es una integral en la que el numerador puede transformarse en la derivada del denominador:

$$\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5}dx=\frac{1}{6}\int \frac{6x-6}{3x^2-6x+5}dx=\frac{1}{6}L\left|3x^2-6x+5\right|+C$$

10.-Integra la siguiente función racional: **I=** $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$ **(RAICES SIMPLES)**

Solución:

Como no puede obtenerse en el numerador la derivada del denominador, utilizaremos el método de descomposición en fracciones simples, ya que el denominador tiene raíces reales.

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{2x-1}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

Como los numeradores son iguales los denominadores también lo serán:

$$2x+1=A(x-2)+B(x-3)$$

Para x = 3,   7 = A;   Para x = 2, 5 = – B

(A x se le han dado los valores de las raíces del denominador.).

Ahora procedemos de la siguiente manera:

$$\text{I}=\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx=\int \frac{7}{x-3}dx+\int \frac{-5}{x-2}dx=7\text{L}\,|\text{x-3}|\,\text{-5L}\,|\text{x-2}|$$

11.-Resuelve la siguiente integral: $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$ **(RAICES DOBLES)**

Solución:

Estamos en el caso en que el denominador tiene raíces múltiples. La descomposición tenemos que hacerla de la siguiente forma: $\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$

(Si la raíz múltiple fuese de orden 3, llegaríamos con las fracciones hasta $\frac{D}{(x-1)^3}$)

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$$ (donde hemos realizado la suma indicada)

Si los numeradores son iguales, los numeradores también lo serán, por tanto,

$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$.

Para calcular los valores de A, B y C damos a x los valores de 0, 1 y otro valor cualquiera, por ejemplo, 2. De ese modo obtenemos A=1, B=–1 y C=1.

Entonces: $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx=\int \frac{1}{x}dx-\int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}dx=L|x|-L|x-1|+\int (x-1)^{-2}dx=$

$$=L|x|-L|x-1|+\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+C=L|x|-L|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

12.-Resuelve la integral siguiente: $I=\int \frac{x-3}{x^2+49}dx$ **(RAICES COMPLEJAS)** No CCSS

Solución:

La descomponemos en dos integrales. En la primera podemos buscar en el numerador la derivada del denominador y en la segunda buscamos el arco tangente

$$I=\int \frac{x}{x^2+49}dx-\int \frac{3}{x^2+49}dx=I_1+I_2$$

$$I_1=\int \frac{x}{x^2+49}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+49}dx=\frac{1}{2}L(x^2+49)$$

$$I_2=\int \frac{3}{x^2+49}dx=\int \frac{3/49}{x^2/49+49/49}dx=\frac{3}{49}\int \frac{1}{1+\left(x/7\right)^2}dx$$

Haciendo el cambio x/7=t resulta x=7t y por tanto dx=7dt por lo que

$$I_2=\frac{3}{49}\int \frac{1}{1+t^2}.7dt=\frac{21}{49}\int \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{3}{7}\operatorname{arctg} t=\frac{3}{7}\operatorname{arctg}\frac{x}{7}$$

13.-Calcula por el método más adecuado la integral siguiente: $\int \frac{(Lx)^3}{x}dx$

Solución

El método más adecuado es el de sustitución o cambio de variable:

$$\begin{bmatrix} Lx=t \\ \frac{1}{x}\quad dx=dt \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{(Lx)^3}{x}dx=\int (Lx)^3.\frac{1}{x}dx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{(Lx)^4}{4}+C$$

14.-Resuelva la integral $\int (x-1)e^x dx$ No CCSS

Solución:

Se resuelve por partes:

$$\begin{bmatrix} u=x-1 & dv=e^x dx \\ du=dx & v=e^x \end{bmatrix}$$

$$\int (x-1)e^x dx=(x-1)e^x-\int e^x dx=(x-1)e^x-e^x+C$$

15.-Resuelve la siguiente integral: $\int xL(1+x)dx$ No CCSS

Solución

$$\begin{bmatrix} u = L(1+x) & dv = x\,dx \\ du = \dfrac{1}{1+x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$I = \frac{x^2}{2}L|1+x| - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{1+x}dx = \frac{x^2}{2}L(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}dx$$

Dividiendo x^2 entre x+1 se obtiene x-1 de cociente y 1 de resto, por tanto,

$I = \dfrac{x^2}{2}L|1+x| - \dfrac{1}{2}\int (x-1+\dfrac{1}{x+1})\,dx$. Finalmente se obtiene

$$I = \frac{x^2}{2}L|1+x| - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + L|x+1|\right) + C$$

16.-Resuelve la siguiente integral trigonométrica: $\int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x}dx$

Solución:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x} = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx + \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx = I_1 + I_2$$

La primera la ponemos de forma que el numerador sea la derivada del denominador:

$$I_1 = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = -L|\cos x|$$

Para la segunda hacemos un cambio de variable:

$$I_2 = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$$

$$\begin{bmatrix} \cos x = t \\ -senx\,dx = dt \end{bmatrix}$$

$$I_2 = \int \frac{-dt}{t^2} = -\int t^{-2}dt = -\left(\frac{t^{-1}}{-1}\right) = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}$$