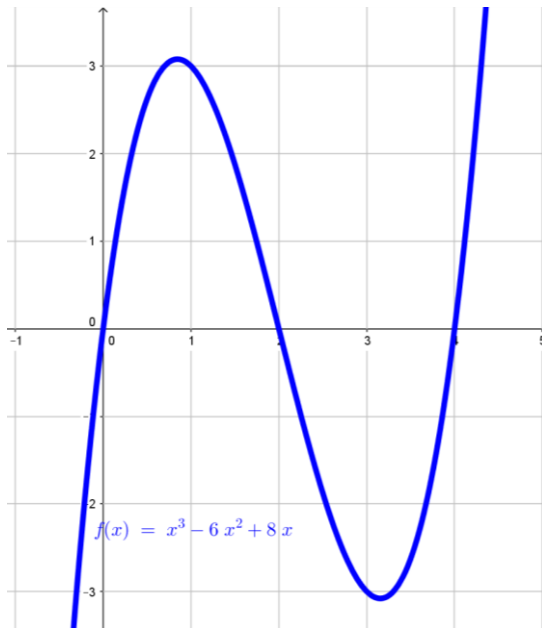


Ejemplos de cálculo de áreas con integrales definidas

1. “Área limitada por una curva y el eje OX”

Calcular el área limitada por la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX



Buscamos los cortes con OX $\Rightarrow y=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0; x = 2; x = 4$$

El área buscada será:

$$A = \left| \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| + \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| =$$

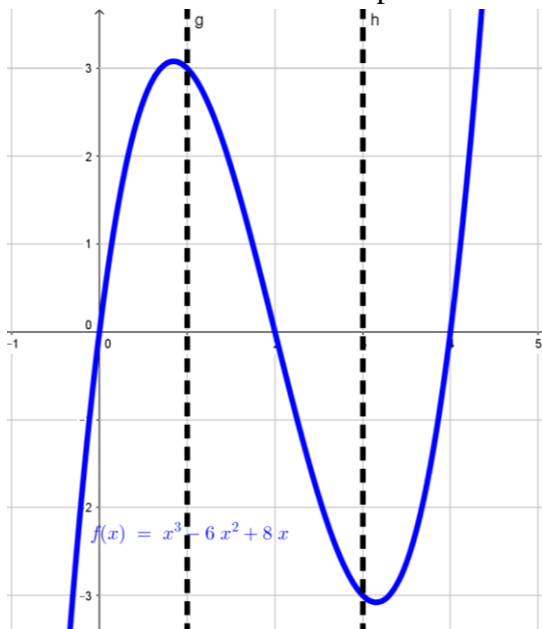
$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_{x=0}^{x=2} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_{x=2}^{x=4} \right| = |4| + |-4| = 8$$

Nos podíamos haber fijado que las dos áreas a sumar son

idénticas y por tanto $A = 2 \cdot \left| \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right|$

2. “Área limitada por una curva el eje OX en un intervalo $[a,b]$ ”

Calcular el área limitada por la función y las rectas $x=1$ y $x=3$.



Buscamos los cortes con OX $\Rightarrow y=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0; x = 2; x = 4$$

Ahora miramos cuantas de esas raíces están comprendidas entre 1 y 3 y vemos que solo hay una $x=2$

El área buscada será:

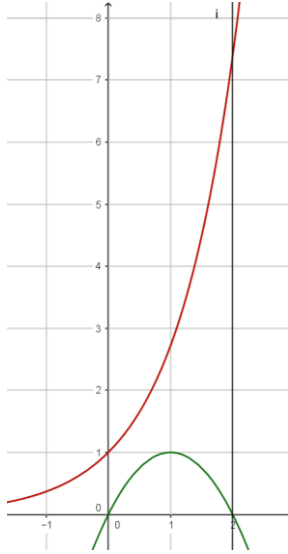
$$A = \left| \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| + \left| \int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_{x=1}^{x=2} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_{x=2}^{x=3} \right| =$$

$$= \left| \frac{7}{4} \right| + \left| -\frac{7}{4} \right| = \frac{7}{2} u^2$$

3. “Área limitada por dos curvas que no se cortan”

Calcular el área limitada por las funciones $f(x) = 2x - x^2$; $g(x) = e^x$ entre $x=0$ y $x=2$.



La parábola corta a OX en $x=0$ y $x=2$.

Coinciden con las rectas que nos dan y por tanto

$$A = \left| \int_0^2 [e^x - (2x - x^2)] dx \right| =$$

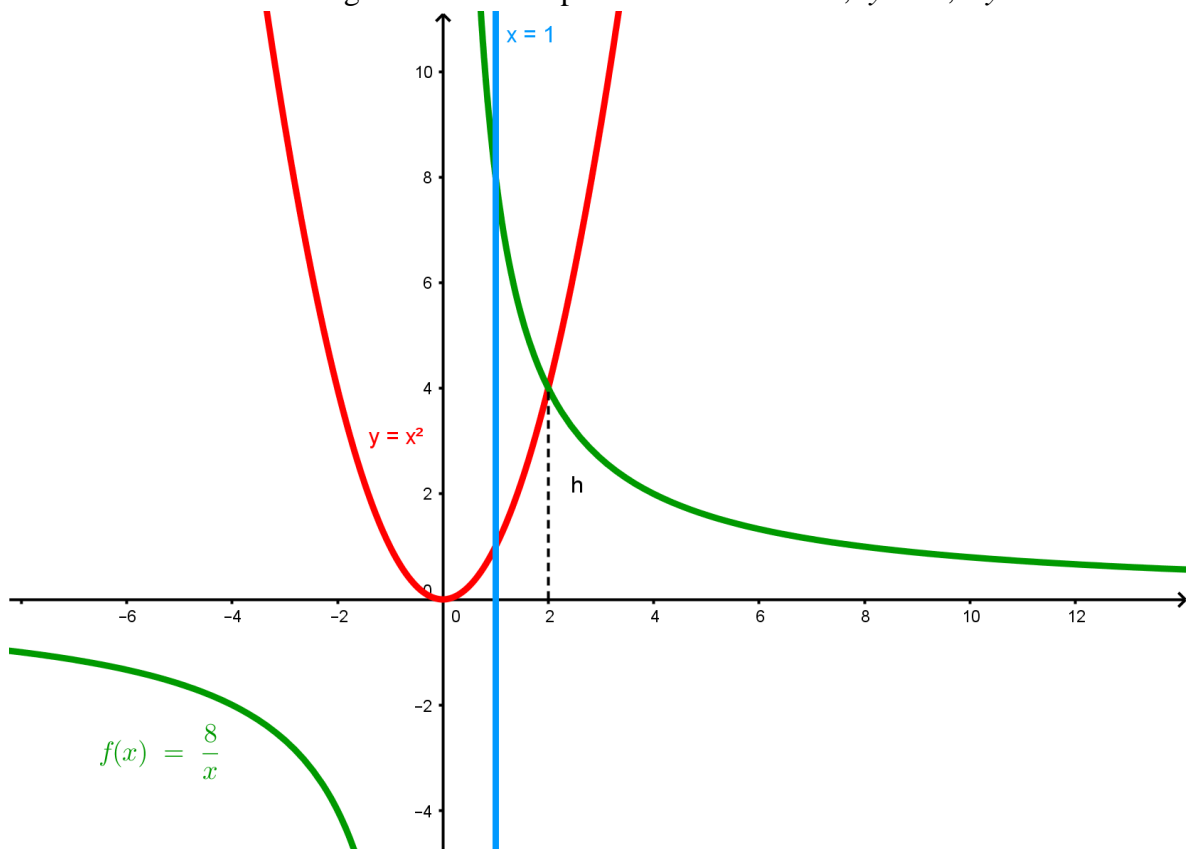
$$= \left| \left[e^x + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{x=0}^{x=2} \right| = e^2 - \frac{7}{3} u^2$$

Al tomar los valores absolutos da igual restar

$f(x) - g(x)$ en el integrando que poner $g(x) - f(x)$

4. “Área limitada por dos curvas que se cortan”

Hallar el área de las regiones limitadas por las funciones $x=1$; $y=x^2$; $xy=8$



Calculamos los puntos de corte entre $y=x^2$ e $y=\frac{8}{x} \Rightarrow x^2 = \frac{8}{x} \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x=2$

Como solo hay un punto de corte el área pedida es:

$$A = \left| \int_1^2 \left(\frac{8}{x} - x^2 \right) dx \right| = \left| \left[8 \ln |x| - \frac{x^3}{3} \right]_{x=1}^{x=2} \right| = \left| \left(8 \ln 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(0 - \frac{1}{3} \right) \right| = 8 \ln 2 - \frac{7}{3} u^2$$