EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

(Septiembre 2010) Se desea cortar una alfombra rectangular para un pasillo teniendo en cuenta que sus bordes se rematarán con dos tipos de cintas: una, que cuesta 32€ por metro, se usará en los laterales, a lo largo del pasillo, y otra, con un precio de 50€ por metro, se empleará para los otros dos bordes.

a) (1 punto) Determina la función que permite obtener el coste del remate que bordea la alfombra a partir de las dimensiones de ésta.

b) (2 puntos) Calcula las dimensiones que debe tener una alfombra de 1 metro cuadrado de superficie para que el remate que la bordea resulte lo más económico posible. Justifica que la solución calculada es la más económica.

c) (0,5 puntos) Halla el coste del remate para las dimensiones obtenidas en el apartado anterior.

x=nº de metros de largo y=nº de metros de ancho

a) $C(x,y) = 2\cdot(32x + 50y) = 64x + 100y$

$$b)\ S = xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow C(y) = \frac{64}{y} + 100y$$

$$\left.\begin{array}{l} C'(y) = -\dfrac{64}{y^2} + 100 \\ C'(y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ -\frac{64}{y^2} + 100 = 0 \Leftrightarrow 100y^2 - 64 = 0 \Rightarrow y = \overset{+}{\cancel{-}}\frac{4}{5}$$

$$C''(y) = \frac{128}{y^3} \Rightarrow C''\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{128}{4/5} > 0 \Rightarrow mínimo$$

Las dimensiones serán 5/4 m de largo por 4/5 m de ancho.

$$c)\ C\left(\frac{5}{4}, \frac{4}{5}\right) = 65\cdot\frac{5}{4} + 100\cdot\frac{4}{5} = 80 + 80 = 160€$$

(Junio 2012) De entre todos los números reales positivos x, y que suman 15, encuentra aquellos para los que el producto x^2y es máximo. (2,25 puntos)

Función relacional: $x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$

Función a optimizar: $P(x,y) = x^2y$ maximizar

$P(x) = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$

Derivamos: $P'(x) = 30x - 3x^2$

$P'(x) = 0 \Rightarrow x(30 - 3x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 10$

$P''(x) = 30 - 6x$

$\rightarrow P''(0) = 30 > 0 \Rightarrow mínimo$

$\rightarrow P''(10) = -30 < 0 \Rightarrow máximo.$

$Solución:\ x = 10 \quad y = 5$

(Junio 2013) De todos los rectángulos de perímetro 16 cm., determina las dimensiones del rectángulo que tiene la diagonal menor. Calcula la longitud de dicha diagonal.

x=longitud de la base en cm y=longitud de la altura en cm.

2x+2y=16 $\Rightarrow$ y=8-x

$$D(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(8-x)^2}=\sqrt{2x^2-16x+64}=0$$

$$D'(x)=\frac{4x-16}{2\sqrt{2x^2-16x+64}}=0\Rightarrow 4x-16=0\Rightarrow x=4$$

$$D''(x)=\frac{4\sqrt{2x^2-16x+64}-(4x-16)\frac{4x-16}{2\sqrt{2x^2-16x+64}}}{2\left(\sqrt{2x^2-16x+64}\right)^2}=\frac{4\left(2x^2-16x+64\right)-(4x-16)(2x-8)}{\left(\sqrt{2x^2-16x+64}\right)\left(2x^2-16x+64\right)}=$$

$$=\frac{8x^2-64x+256-\left(8x^2-64x+128\right)}{\left(\sqrt{2x^2-16x+64}\right)\left(2x^2-16x+64\right)}=\frac{128}{\left(\sqrt{2x^2-16x+64}\right)\left(2x^2-16x+64\right)}$$

$$D''(4)=\frac{\sqrt{2}}{2}>0\Rightarrow \text{mínimo.}$$

x=4 y=4. Es un cuadrado de lado 4 cm.

(Junio 2014) Halla tres números no negativos que sumen 14, tales que uno sea el doble del otro que y la suma de los tres sea mínima.(2 puntos)

Los números serán x, 2x e y

x+2x+y=14 $\Rightarrow$ y=14-3x S=$x^2+4x^2+y^2$ *mínima.*

$$S=5x^2+(14-3x)^2=14x^2-84x+206$$

$$S'=28x-84=0\Rightarrow x=3$$

$$S''=28>0\Rightarrow \textit{mínimo.}$$

Los números serán 3, 6 y 5

(Septiembre 2014) Se quiere vallar una finca rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 125 € el metro, y la de los otros tres lados cuesta 25 € el metro. Hallar el área del terreno de mayor superficie que podemos vallar con 3000 €. (2 puntos)

Sea x la longitud en metros de la valla del camino e y la longitud del lado perpendicular.

$$125x+25(x+2y)=3000\Rightarrow 150x+50y=3000\Rightarrow y=60-3x$$

$$A=xy=x(60-3x)=60x-3x^2$$

$$A'=0\Leftrightarrow 60-6x=0\Rightarrow x=10$$

$$A''=-6<0\Rightarrow \text{máximo}\Rightarrow \text{x}=10\ \ \text{y}=30$$

(Junio 2016) Se quiere construir un depósito (sin techo) con forma de prisma recto de base cuadrada y lados rectángulos. El depósito debe albergar un volumen de 2000 m^3. Sabemos que el coste de materiales de la base es de 50€/m^2, el coste de materiales de las cuatro paredes es de 100€/m^2. Además el coste de construcción es un coste fijo de 20 000€.

a) (0,5 puntos) Escriba la función c(l) de coste total en función del lado de la base l.
b) (1,5 puntos) ¿para qué valor de l es el coste total mínimo?¿cuánto es este coste?
c) (0,5 puntos) ¿Qué ocurre con el coste cuando el lado l de la base del depósito tiende a infinito?¿Y cuándo tiende a cero?
d) (1 punto) Usando solo los datos obtenidos de los apartados anteriores, haga un esbozo de la curva c(l) en el dominio $l \in (0,\infty)$

Sea l= lado de la base cuadrada y h=altura del depósito.

Volumen=$l^2.h = 2000 \Rightarrow h = \dfrac{2000}{l^2}$

$$a)\ c(l) = 50l^2 + 100(4lh) + 20000 = 50l^2 + \frac{800000}{l} + 20000$$

$$b)\ c'(l) = 100l - \frac{800000}{l^2} = 0 \Rightarrow 100l^3 = 800000 \Rightarrow l = \sqrt[3]{8000} = 20$$

$$c''(l) = 100 + \frac{1600000}{t^3} \Rightarrow c''(20) > 0 \ \ \textit{mínimo}. \text{ Será mínimo coste para l=20m}$$

El coste mínimo es c(20)=80000€.

$$c)\ \lim_{l\to\infty}\left(50l^2 + \frac{800000}{l} + 20000\right) = +\infty \qquad \lim_{l\to 0^+}\left(50l^2 + \frac{800000}{l} + 20000\right) = +\infty$$

Cuando el lado l va a inifito o a cero el coste se dispara a infinito.