Ejercicios y problemas propuestos

Página 350

Para practicar

Integrales casi inmediatas

1 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{4x^2 - 5x + 7}{2}\,dx$ **b)** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x}}$

c) $\int \frac{1}{2x + 7}\,dx$ **d)** $\int (x - sen\ x)\,dx$

a) $\int \frac{4x^2 - 5x + 7}{2}\,dx = \int \left(2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}\right) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{4} + \frac{7}{2}x + k$

b) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{x\,dx}{x^{1/3}} = \int x^{2/3}\,dx = \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + k = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + k$

c) $\int \frac{1}{2x + 7}\,dx = \frac{1}{2}\,ln\,|2x + 7| + k$

d) $\int (x - sen\ x)\,dx = \frac{x^2}{2} + cos\ x + k$

2 **Resuelve estas integrales:**

a) $\int (x^2 + 1)^2\,dx$ **b)** $\int (x - 5)^3\,dx$

c) $\int \sqrt{3x + 5}\,dx$ **d)** $\int (cos\ x + e^x)\,dx$

a) $\int (x^2 + 1)^2\,dx = \int (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + k$

b) $\int (x - 5)^3\,dx = \frac{(x - 5)^4}{4} + k$

c) $\int \sqrt{3x + 5}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x + 5)^{1/2}\,3\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{(3x + 5)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{9}\sqrt{(3x + 5)^3} + k$

d) $\int (cos\ x + e^x)\,dx = \int cos\ x\,dx + \int e^x\,dx = sen\ x + e^x + k$

3 **Calcula:**

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\,dx$ **b)** $\int \frac{7}{cos^2 x}\,dx$

c) $\int sen\,(x - 4)\,dx$ **d)** $\int (e^{2x} + 3e^{-x})\,dx$

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int x^{2/3}\,dx = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + k = \frac{3}{5\sqrt[3]{2}}\,\sqrt[3]{x^5} + k$

b) $\int \frac{7}{cos^2 x}\,dx = 7\,tg\ x + k$

c) $\int sen\,(x - 4)\,dx = -cos\,(x - 4) + k$

d) $\int (e^{2x} + 3e^{-x})\,dx = \int e^{2x}\,dx + \int 3e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,2\,dx - 3\int e^{-x}\,(-1)\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2x} - 3e^{-x} + k$

4 **Halla las siguientes integrales:**

a) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx$ **b)** $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$ **c)** $\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2}\, dx$

d) $\int \frac{-8}{1+x^2}\, dx$ **e)** $\int \frac{3x}{1+x^2}\, dx$ **f)** $\int \frac{x^2}{2-x^3}\, dx$

a) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx = 2\int \frac{1}{x}\, dx + 2\int x^{-2}\, dx = 2\ ln\,|x| - \frac{2}{x} + k$

b) $\int \frac{dx}{(x-1)^3} = \int (x-1)^{-3}\, dx = -\frac{1}{2\,(x-1)^2} + k$

c) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-3/2}\right) dx = ln\,|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{-8}{1+x^2}\, dx = -8 arc\ tg\, x + k$

e) $\int \frac{3x}{1+x^2}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \frac{3}{2}\, ln\,(1+x^2) + k$

f) $\int \frac{x^2}{2-x^3}\, dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3x^2}{2-x^3}\, dx = -\frac{1}{3}\, ln\,|2-x^3| + k$

5 **Resuelve las integrales siguientes:**

a) $\int \frac{dx}{3x-4}$ **b)** $\int \frac{dx}{(3x-4)^2}$ **c)** $\int \sqrt{3x-4}\, dx$ **d)** $\int \sqrt[5]{\frac{1}{(3x-4)^3}}\, dx$

a) $\int \frac{dx}{3x-4} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x-4} = \frac{1}{3}\, ln\,|3x-4| + k$

b) $\int \frac{dx}{(3x-4)^2} = \frac{1}{3}\int (3x-4)^{-2}\, 3\, dx = -\frac{1}{3\,(3x-4)} + k$

c) $\int \sqrt{3x-4}\, dx = \frac{1}{3}\int (3x-4)^{1/2}\, 3\, dx = \frac{1}{3}\, \frac{(3x-4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{9}\sqrt{(3x-4)^3} + k$

d) $\int \sqrt[5]{\frac{1}{(3x-4)^3}}\, dx = \frac{1}{3}\int (3x-4)^{-3/5}\, 3\, dx = \frac{1}{3}\, \frac{(3x-4)^{2/5}}{\frac{2}{5}} + k = \frac{5}{6}\sqrt[5]{(3x-4)^2} + k$

6 **Halla las siguientes integrales del tipo exponencial:**

a) $\int e^{x-4}\, dx$ **b)** $\int e^{-2x+9}\, dx$ **c)** $\int e^{5x}\, dx$ **d)** $\int (3^x - x^3)\, dx$

a) $\int e^{x-4}\, dx = e^{x-4} + k$

b) $\int e^{-2x+9}\, dx = \frac{-1}{2}\int -2e^{-2x+9}\, dx = \frac{-1}{2}\, e^{-2x+9} + k$

c) $\int e^{5x}\, dx = \frac{1}{5}\int 5e^{5x}\, dx = \frac{1}{5}\, e^{5x} + k$

d) $\int (3^x - x^3)\, dx = \frac{3^x}{ln\ 3} - \frac{x^4}{4} + k$

7 **Resuelve las siguientes integrales del tipo arco tangente:**

a) $\int \frac{2\,dx}{1+25x^2}$ **b)** $\int \frac{5dx}{100x^2+1}$ **c)** $\int \frac{4\,dx}{3+3x^2}$ **d)** $\int \frac{dx}{4+x^2}$

e) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$ **f)** $\int \frac{dx}{9+x^2}$ **g)** $\int \frac{dx}{2+4x^2}$ **h)** $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

a) $\int \frac{2\,dx}{1+25x^2} = \int \frac{2\,dx}{1+(5x)^2} = \frac{2}{5}\,arc\ tg\ 5x + k$

b) $\int \frac{5\,dx}{100x^2+1} = \int \frac{5\,dx}{(10x)^2+1} = \frac{5}{10}\,arc\ tg\ 10x + k = \frac{1}{2}\,arc\ tg\ 10x + k$

c) $\int \frac{4\,dx}{3+3x^2} = \int \frac{4\,dx}{3(1+x^2)} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4}{3}\,arc\ tg\ x + k$

d) $\int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{1/4}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,arc\ tg\left(\frac{x}{2}\right) + k$

e) $\int \frac{dx}{4+9x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\,arc\ tg\left(\frac{3x}{2}\right) + k = \frac{1}{6}\,arc\ tg\left(\frac{3x}{2}\right) + k$

f) $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}}\,arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right) + k = \frac{1}{3}\,arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right) + k$

g) $\int \frac{dx}{2+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}}\,arc\ tg\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) + k = \frac{\sqrt{2}}{4}\,arc\ tg\ (\sqrt{2}\,x) + k$

h) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx = arc\ tg\ (e^x) + k$

8 **Expresa el cociente de la forma** $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$ **y resuelve:**

a) $\int \frac{x^2}{x-3}\,dx$ **b)** $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}\,dx$

c) $\int \frac{x^2-1}{x+2}\,dx$ **d)** $\int \frac{2x^2+2x+4}{x+2}\,dx$

e) $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$ **f)** $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}\,dx$

a) $\int \frac{x^2}{x-3}\,dx = \int\left(x+3+\frac{9}{x-3}\right)dx = \int x\,dx + \int 3\,dx + \int \frac{9}{x-3}\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 9\ln|x-3| + k$

b) $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}\,dx = \int\left(x-6+\frac{10}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 10\ \ln|x+1| + k$

c) $\int \frac{x^2-1}{x+2}\,dx = \int\left(x-2+\frac{3}{x+2}\right)dx = \int x\,dx - \int 2\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x+2| + k$

d) $\int \frac{2x^2+2x+4}{x+2}\,dx = \int\left(2x-2+\frac{8}{x+2}\right)dx = \int 2x\,dx - \int 2\,dx + \int \frac{8}{x+2}\,dx = x^2 - 2x + 8\ln|x+2| + k$

e) $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int\left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \int x\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + k$

f) $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}\,dx = \int\left(x^2-x-1-\frac{3}{x-2}\right)dx = \int x^2\,dx - \int x\,dx - \int dx - \frac{3}{x-2}\,dx =$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 3\ln|x-2| + k$

9 **Halla estas integrales sabiendo que son del tipo arco seno:**

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-100x^2}}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\,arc\ sen\,(2x) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{1/2\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + k$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-100x^2}}\,dx = \frac{1}{10}\int \frac{10}{\sqrt{1-(10x)^2}}\,dx = \frac{1}{10}\,arc\ sen\,10x + k$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-(\ln x)^2}} = arc\ sen\ \ln x + k$, ya que $D[\ln x] = \dfrac{1}{x}$.

10 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int sen\,x\,cos\,x\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{sen\,x\,dx}{cos^5 x}$ **c)** $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **d)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$

a) $\displaystyle\int sen\,x\cdot cos\,x\,dx = \frac{sen^2 x}{2} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{sen\,x\,dx}{cos^5 x} = -\int(-sen\,x)\cdot cos^{-5} x\,dx = \frac{-\,cos^{-4} x}{-4} + k = \frac{1}{4cos^4 x} + k$

c) $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\int -2x(9-x^2)^{-1/2}\,dx = -\frac{(9-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + k = -2\sqrt{9-x^2} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+5)^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+5)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+5} + k$

11 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x}\,(x-1)\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{arc\ sen\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int \sqrt{(1+cos\,x)^3}\,sen\,x\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$ **e)** $\displaystyle\int \frac{2x^2}{(2-x^3)^2}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x}\,(x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-2x}\,(2x-2)\,dx = \frac{1}{2}\int(x^2-2x)^{1/2}\,(2x-2)\,dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-2x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{\sqrt{(x^2-2x)^3}}{3} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{arc\ sen\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,arc\ sen\,x\,dx = \frac{arc\ sen^2 x}{2} + k$

c) $\displaystyle\int \sqrt{(1+cos\,x)^3}\,sen\,x\,dx = -\int(1+cos\,x)^{3/2}\,(-sen\,x)\,dx = -\frac{(1+cos\,x)^{5/2}}{\frac{5}{2}} + k = \frac{-2\sqrt{(1+cos\,x)^5}}{5} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx = \int(1+\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{(1+\ln x)^3}{3} + k$

e) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{(2-x^3)^2}\,dx = \frac{2}{3}\int\frac{3x^2}{(2-x^3)^2}\,dx = \frac{2}{3}\int(2-x^3)^{-2}\,3x^2\,dx = -\frac{2}{3\,(x^3-2)} + k$

f) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx = \int(1+e^x)^{-1/2}\,e^x\,dx = \frac{(1+e^x)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + k = 2\sqrt{e^x+1} + k$

Integración por partes

12 **Aplica la integración por partes para resolver las siguientes integrales:**

a) $\int x\, e^{2x}\, dx$

b) $\int x^2 \ln x\, dx$

c) $\int 3x \cos x\, dx$

d) $\int \ln (2x-1)\, dx$

e) $\int \frac{x}{e^x}\, dx$

f) $\int \arccos x\, dx$

a) $\int x\, e^{2x}\, dx$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}\, dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int x\, e^{2x}\, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + k$$

b) $\int x^2 \ln x\, dx$

$$\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = x^2\, dx \rightarrow v = \frac{x^3}{2} \end{cases}$$

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + k$$

c) $\int 3x \cos x\, dx = 3 \int x \cos x\, dx$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x\, dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$3 \int x \cos x\, dx = 3\left[x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx\right] = 3\,[x \operatorname{sen} x + \cos x] + k = 3x \operatorname{sen} x + 3\cos x + k$$

d) $\int \ln (2x-1)\, dx$

$$\begin{cases} u = \ln 2x - 1 \rightarrow du = \frac{2}{2x-1} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int \ln (2x-1)\, dx = x \ln (2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1}\, dx = x \ln (2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right) dx =$$

$$= x \ln (2x-1) - x - \frac{1}{2} \ln (2x-1) + k$$

e) $\int \frac{x}{e^x}\, dx$

$$\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\, dx \rightarrow v = -e^{-x}\, dx \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{e^x}\, dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + k$$

f) $\int \arccos x\, dx$

$$\begin{cases} u = \arccos x \rightarrow du = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int \arccos x\, dx = x \cdot \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + k$$

13 **Resuelve las siguientes integrales aplicando dos veces la integración por partes:**

a) $\int x^2 \, sen\, x \, dx$ **b)** $\int x^2 e^{2x} \, dx$ **c)** $\int e^x \cos x \, dx$ **d)** $\int (x+1)^2 e^x \, dx$

a) $\int x^2 \, sen\, x \, dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\int x^2 \, sen\, x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \underbrace{\int x \cos x \, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = \cos x\, dx \rightarrow v_1 = sen\, x \end{cases}$$

$$I_1 = x\, sen\, x - \int sen\, x\, dx = x\, sen\, x + \cos x$$

Por tanto:

$$\int x^2 \, sen\, x\, dx = -x^2 \cos x + 2x\, sen\, x + 2\cos x + k$$

b) $\int x^2 e^{2x} \, dx$

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x\, dx \\ dv = e^{2x}\, dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \underbrace{\int x e^{2x}\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = e^{2x}\, dx \rightarrow v_1 = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{x}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

Por tanto:

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + k = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) e^{2x} + k$$

c) $\int e^x \cos x \, dx$

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x\, dx \\ dv = \cos x\, dx \rightarrow v = sen\, x \end{cases}$$

$$I = e^x\, sen\, x - \underbrace{\int e^x\, sen\, x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$I_1 = -\cos x\, e^x + \int e^x \cos x\, dx$$

$$I = e^x\, sen\, x - (-\cos x\, e^x + I)$$

$$2I = e^x\, sen\, x + e^x \cos x$$

$$I = \frac{e^x\, sen\, x + e^x \cos x}{2} + k$$

d) $\int (x+1)^2 e^x \, dx$

$$\begin{cases} u = (x+1)^2 \;\to\; du = 2(x+1)\,dx \\ dv = e^x \, dx \;\to\; v = e^x \end{cases}$$

$$\int (x+1)^2 e^x \, dx = (x+1)^2 e^x - 2\underbrace{\int (x+1)\, e^x \, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = (x+1) \;\to\; du_1 = dx \\ dv_1 = e^x \, dx \;\to\; v_1 = e^x \end{cases}$$

$$I_1 = (x+1)\, e^x - \int e^x \, dx = (x+1)\, e^x - e^x = (x+1-1)\, e^x = x\, e^x$$

Por tanto:

$$\int (x+1)^2 e^x \, dx = (x+1)^2 e^x - 2x\, e^x + k = (x^2+2x+1-2x)\, e^x + k = (x^2+1)\, e^x + k$$

Página 351

Integrales racionales

14 **Aplica la descomposición en fracciones simples para resolver las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{1}{x^2+x-6}\, dx$

b) $\int \frac{3x^3}{x^2-4}\, dx$

c) $\int \frac{dx}{(x^2-25)(x-4)}$

d) $\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\, dx$

e) $\int \frac{4}{x^2+x-2}\, dx$

f) $\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\, dx$

a) $\int \frac{1}{x^2+x-6}\, dx$

$$\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \quad \begin{cases} A = -1/5 \\ B = 1/5 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\, dx = \int \frac{-1/5}{x+3}\, dx + \int \frac{1/5}{x-2}\, dx = -\frac{1}{5}\, ln\,|x+3| + \frac{1}{5}\, ln\,|x-2| + k$$

b) $\int \frac{3x^3}{x^2-4}\, dx$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 & x^2-4 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 12x & 3x \\ \hline \quad\quad 12x & \end{array} \qquad \frac{3x^3}{x^2-4} = 3x + \frac{12x}{x^2-4}$$

$$\int \frac{3x^3}{x^2-4}\, dx = \int \left(3x + \frac{12x}{x^2-4}\right) dx = \frac{3x^2}{2} + 6 ln\,|x^2-4| + k$$

c) $\int \frac{dx}{(x^2-25)(x-4)} = \int \frac{dx}{(x+5)(x-5)(x-4)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+5)(x-5)(x-4)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{x-4} \;\to\; A = \frac{1}{90},\; B = \frac{1}{10},\; C = -\frac{1}{9}$$

$$I = \frac{1}{90}\int \frac{1}{x+5}\, dx + \frac{1}{10}\int \frac{1}{x-5}\, dx - \frac{1}{9}\int \frac{1}{x-4}\, dx = \frac{1}{90}\, ln\,|x+5| + \frac{1}{10}\, ln\,|x-5| - \frac{1}{9}\, ln\,|x-4| + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$

Por el mismo procedimiento:

$$\frac{x^2+1}{x^2+x} = 1 + \frac{-x+1}{x^2+x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx = x + ln\,|x| - 2ln\,|x+1| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+x-2}\,dx$

$$\frac{4}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \;\rightarrow\; A = -\frac{4}{3},\; B = \frac{4}{3}$$

$$\int \frac{4}{x^2+x-2}\,dx = -\frac{4}{3}\,ln\,|x+2| + \frac{4}{3}\,ln\,|x-1| + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx$

$$\frac{x^2}{x^2+4x+3} = 1 - \frac{4x+3}{x^2+4x+3} = 1 - \left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}\right) \;\rightarrow\; A = \frac{9}{2},\; B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+4x+3}\,dx = \int\left[1 - \left(\frac{9/2}{x+3} + \frac{-1/2}{x+1}\right)\right]dx = x - \frac{9}{2}\,ln\,|x+3| + \frac{1}{2}\,ln\,|x+1| + k$$

15 Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)\,(x+5)}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\,(x+3)^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(2 + \frac{x-1}{x^2-3x+2}\right)dx = \int 2\,dx + \int \frac{x-1}{x^2-3x+2}\,dx = 2x + I_1$

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{x-1}{(x-1)\,(x-2)}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)}\,dx = ln\,|x-2|$$

Por tanto, $I = 2x + ln\,(x-2) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx = \int \frac{-16}{(x+3)\,(x-5)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-16}{(x+3)\,(x-5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} \;\rightarrow\; A = 2,\; B = -2$$

$$I = 2\int \frac{1}{x+3}\,dx - 2\int \frac{1}{x-5}\,dx = 2ln\,|x+3| - 2ln\,|x-5| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{2x-4}{(x-1)^2\,(x+3)} = \frac{A(x-1)\,(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2\,(x+3)}$$

$2x - 4 = A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x=1 & \rightarrow & -2 = 4B & \rightarrow\ B = -1/2 \\ x=-3 & \rightarrow & -10 = 16C & \rightarrow\ C = -5/8 \\ x=0 & \rightarrow & -4 = -3A + 3B + C & \rightarrow\ A = 5/8 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-4}{(x-1)^2(x+3)}\,dx = \int \frac{5/8}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-5/8}{x+3}\,dx =$$

$$= \frac{5}{8}\,ln\,|x-1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{5}{8}\,ln\,|x+3| + k = \frac{5}{8}\,ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right) + \frac{1}{2x-2} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x-2)}{(x-2)(x+5)}$$

$2x + 3 = A(x+5) + B(x-2)$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{llll} x=2 & \rightarrow & 7 = 7A & \rightarrow\ A = 1 \\ x=-5 & \rightarrow & -7 = -7B & \rightarrow\ B = 1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+5}\,dx = ln\,|x-2| + ln\,|x+5| + k = ln\,|(x-2)(x+5)| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1)}{(x-1)(x+3)^2}$$

$1 = A(x+3)^2 + B(x-1)(x+3) + C(x-1)$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{llll} x=1 & \rightarrow & 1 = 16A & \rightarrow\ A = 1/16 \\ x=-3 & \rightarrow & 1 = -4C & \rightarrow\ C = -1/4 \\ x=0 & \rightarrow & 1 = 9A - 3B - C & \rightarrow\ B = -1/16 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+3)^2}\,dx = \int \frac{1/16}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/16}{x+3}\,dx + \int \frac{-1/4}{(x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\,ln\,|x-1| - \frac{1}{16}\,ln\,|x+3| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+3)} + k = \frac{1}{16}\,ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + \frac{1}{4(x+3)} + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$3x - 2 = A(x+2) + B(x-2)$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lllll} x = 2 & \to & 4 = 4A & \to & A = 1 \\ x = -2 & \to & -4 = -4B & \to & B = 2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx = ln\,|x-2| + 2ln\,|x+2| + k = ln\,[|x-2|\,(x+2)^2] + k$$

Integrales por sustitución

16 **Aplica el método de sustitución para resolver las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ **b)** $\displaystyle\int x\,\sqrt[3]{x+2}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1}$ **d)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$

a) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^2 \to dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{t^2-t} = \int \frac{2\,dt}{t-1} = 2ln\,|t-1| + k = 2ln\,|\sqrt{x}-1| + k$$

b) Para eliminar la raíz hacemos $x + 2 = t^3 \to dx = 3t^2\,dt \quad (x = t^3 - 2)$

$$\int x\,\sqrt[3]{x+2}\,dx = \int (t^3-2)\,t \cdot 3t^2\,dt = 3\int (t^6 - 2t^3)\,dt = \frac{3t^7}{7} - \frac{3t^4}{2} + k = \frac{3\sqrt[3]{(x+2)^7}}{7} - \frac{3\sqrt[3]{(x+2)^4}}{2} + k$$

c) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^6 \to dx = 6t^5\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}-1} = \int \frac{t^3}{t^2-1}6t^5\,dt = 6\int \frac{t^8}{t^2-1}\,dt = 6\int \left(t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

Calculamos, usando el método de descomposición en fracciones simples:

$$\int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int \frac{1}{(t+1)(t-1)}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,dt = -\frac{1}{2}\,ln\,|t+1| + \frac{1}{2}\,ln\,|t-1| + k$$

Ya que $\displaystyle\frac{1}{(t+1)(t-1)} = \frac{-1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}$.

Terminamos el cálculo de la integral:

$$I = 6\left(\frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t - \frac{1}{2}\,ln\,|t+1| + \frac{1}{2}\,ln\,|t-1|\right) + k =$$

$$= \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} + \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 3ln\,|\sqrt[6]{x}+1| + 3ln\,|\sqrt[6]{x}-1| + k$$

d) Para eliminar la raíz hacemos $2 - x = t^2 \to -dx = 2t\,dt \to dx = -2t\,dt \quad (x = 2 - t^2)$

$$\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}} = \int \frac{-2t\,dt}{[3-(2-t^2)]\,t} = \int \frac{-2d\,dt}{t^2+1} = -2arc\;tg\;t + k = -2arc\;tg\;\sqrt{2-x} + k$$

Para resolver

17 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int x^4\,e^{x^5}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int x\,sen\,x^2\,dx$ **c)** $\displaystyle\int x \cdot 2^{-x}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int x^3\,sen\,x\,dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt{(x+3)^5}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{-3x}{2-6x^2}\,dx$ **g)** $\displaystyle\int e^{2x+1}\,cos\,x\,dx$ **h)** $\displaystyle\int x^5\,e^{-x^3}\,dx$

a) $\displaystyle\int x^4\,e^{x^5}\,dx = \frac{1}{5}\int 5x^4\,e^{x^5}\,dx = \frac{1}{5}\,e^{x^5} + k$

b) $\displaystyle\int x\,sen\,x^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,sen\,x^2\,dx = \frac{-1}{2}\,cos\,x^2 + k$

c) $\int x \cdot 2^{-x}\, dx$

$$\begin{cases} u = x \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = 2^{-x}\, dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{-2^{-x}}{ln\, 2} \end{cases}$$

$$\int x\, 2^{-x}\, dx = \frac{-x \cdot 3^{-x}}{ln\, 2} + \int \frac{2^{-x}}{ln\, 2}\, dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{ln\, 2} + \frac{1}{ln\, 2} \int 2^{-x}\, dx = \frac{-x \cdot 2^{-x}}{ln\, 2} - \frac{2^{-x}}{(ln\, 2)^2} + k$$

d) $\int x^3\, sen\, x\, dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \;\rightarrow\; du = 3x^2\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \;\rightarrow\; v = -cos\, x \end{cases}$$

$$\int x^3\, sen\, x\, dx = -x^3\, cos\, x + 3 \int \underbrace{x^2\, cos\, x\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x^2 \;\rightarrow\; du_1 = 2x\, dx \\ dv_1 = cos\, x\, dx \;\rightarrow\; v_1 = sen\, x \end{cases}$$

$$I_1 = x^2\, sen\, x - 2 \int \underbrace{x\, sen\, x\, dx}_{I_2}$$

$$\begin{cases} u_2 = x \;\rightarrow\; du_2 = dx \\ dv_2 = sen\, x\, dx \;\rightarrow\; v_2 = -cos\, x \end{cases}$$

$$I_2 = -x\, cos\, x + \int cos\, x\, dx = -x\, cos\, x + sen\, x$$

Así: $I_1 = x^2\, sen\, x + 2x\, cos\, x - 2sen\, x$

Por tanto:

$$\int x^3\, sen\, x\, dx = -x^3\, cos\, x + 3x^2\, sen\, x + 6x\, cos\, x - 6sen\, x + k$$

e) $\displaystyle\int \sqrt{(x+3)^5}\, dx = \int (x+3)^{5/2}\, dx = \frac{(x+3)^{7/2}}{7/2} = \frac{2}{7}\sqrt{(x+3)^7} + k$

f) $\displaystyle\int \frac{-3x}{2-6x^2}\, dx = \frac{1}{4} \int \frac{-12x}{2-6x^2}\, dx = \frac{1}{4}\, ln\, |2-6x^2| + k$

g) Esta es una integral que se resuelve aplicando el método de integración por partes dos veces:

$$I = \int e^{2x+1}\, cos\, x\, dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = e^{2x+1} \;\rightarrow\; du = 2e^{2x+1}\, dx \\ dv = cos\, x\, dx \;\rightarrow\; v = sen\, x \end{cases}$$

$$I = e^{2x+1}\, sen\, x - 2\int e^{2x+1}\, sen\, x\, dx = e^{2x+1}\, sen\, x - 2I_1$$

$$I_1 = \int e^{2x+1}\, sen\, x\, dx$$

Integramos I_1 por partes:

$$\begin{cases} u = e^{2x+1} \;\rightarrow\; du = 2e^{2x+1}\, dx \\ dv = sen\, x\, dx \;\rightarrow\; v = -cos\, x \end{cases}$$

$$I_1 = -e^{2x+1}\, cos\, x + 2\int e^{2x+1}\, cos\, x\, dx$$

Sustituyendo en I:

$$\int e^{2x+1} \cos x \, dx = e^{2x+1} \operatorname{sen} x - 2\left(-e^{2x+1} \cos x + 2\int e^{2x+1} \cos x \, dx\right) =$$

$$= e^{2x+1} \operatorname{sen} x + 2e^{2x+1} \cos x - 4\int e^{2x+1} \cos x \, dx$$

Pasamos la integral al primer miembro y despejamos:

$$\int e^{2x+1} \cos x \, dx = \frac{e^{2x+1} \operatorname{sen} x + 2e^{2x+1} \cos x}{5} + k = \frac{e^{2x+1}}{5} (\operatorname{sen} x + 2\cos x) + k$$

h) $\int x^5 e^{-x^3} dx = \int x^3 \cdot x^2 e^{-x^3} dx$

$$\begin{cases} u = x^3 \;\to\; du = 3x^2 \, dx \\ dv = x^2 e^{-x^3} dx \;\to\; v = \dfrac{-1}{3} e^{-x^3} \end{cases}$$

$$\int x^5 e^{-x^3} dx = \frac{-x^3}{3} e^{-x^3} + \int x^2 e^{-x^3} dx = \frac{-x^3}{3} e^{-x^3} - \frac{1}{3} e^{-x^3} + k = \frac{(-x^3 - 1)}{3} e^{-x^3} + k$$

18 Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+1} dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x^2+x-1} dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{4x^2-9} dx$

e) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1} dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{2x^2+8} dx$

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+1} dx \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{2}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + 2 \operatorname{arc\,tg} x + k$

(1) Hacemos $\displaystyle\int \frac{(x+2)\, dx}{x^2+1} = \int \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}\right) dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2 (x+1)^2} dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)^2 (x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2 (x+1)^2} = \frac{A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x-1)^2 (x+1)^2}$$

$$1 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2$$

Calculamos A, B, C y D dando a x los valores 1, –1, 0 y 2:

$$\left.\begin{array}{ll} x = 1 & \to\; 1 = 4B \;\to\; B = 1/4 \\ x = -1 & \to\; 1 = 4D \;\to\; D = 1/4 \\ x = 0 & \to\; 1 = -A + B + C + D \;\to\; 1/2 = -A + C \\ x = 2 & \to\; 1 = 9A + 9B + 3C + D \;\to\; -3/2 = 9A + 3C \;\to\; -1/2 = 3A + C \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = -1/4 \\ B = 1/4 \\ C = 1/4 \\ D = 1/4 \end{array}$$

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx = \int \frac{-1/4}{(x-1)} dx + \int \frac{1/4}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1/4}{(x+1)} dx + \int \frac{1/4}{(x+1)^2} dx =$$

$$= \frac{-1}{4} \ln |x-1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{4} \ln |x+1| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)} + k =$$

$$= \frac{-1}{4}\left[\ln |x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln |x+1| + \frac{1}{x+1}\right] + k = \frac{-1}{4}\left[\ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{2x}{x^2-1}\right] + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x^2+x-1}\,dx = \int \frac{x+2}{(x+1)(2x-1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{(x+1)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} \;\to\; A = -\frac{1}{3},\;\; B = \frac{5}{3}$$

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{2x-1} = -\frac{1}{3}\,ln\,(x+1) + \frac{5}{6}\,ln\,(2x-1) + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{4x^2-9}\,dx = \int \frac{x-1}{(2x+3)(2x-3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x-1}{(2x+3)(2x-3)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2x-3} \;\to\; A = \frac{5}{12},\;\; B = \frac{1}{12}$$

$$I = \frac{5}{12}\int \frac{dx}{2x+3} + \frac{1}{12}\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{5}{24}\,ln\,(2x+3) + \frac{1}{24}\,ln\,(2x-3) + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples (para ello, encontramos las raíces del denominador):

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{2x^2+7x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$2x^2+7x-1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lclcl} x = 1 & \to & 8 = 4A & \to & A = 2 \\ x = -1 & \to & -6 = -2C & \to & C = 3 \\ x = 0 & \to & -1 = A - B - C & \to & B = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx = 2\,ln\,|x-1| - \frac{3}{x+1} + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{2x^2+8}\,dx$

Como el denominador no tiene raíces:

$$I = \frac{3}{4}\int \frac{4x}{2x^2+8}\,dx - \int \frac{dx}{2x^2+8} = \frac{3}{4}\,ln\,(2x^2+8) - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{3}{4}\,ln\,(2x^2+8) - \frac{1}{8}\,\frac{1}{\frac{1}{2}}\,arc\;tg\,\frac{x}{2} + k = \frac{3}{4}\,ln\,(2x^2+8) - \frac{1}{4}\,arc\;tg\,\frac{x}{2} + k$$

19 **Resuelve las integrales siguientes:**

a) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

b) $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x}\,dx$

c) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

d) $\int \frac{1+e^x}{e^x+x}\,dx$

e) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

f) $\int \ln(x-3)\,dx$

g) $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

h) $\int \ln(x^2+1)\,dx$

a) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\ln x\,dx = \frac{\ln^2|x|}{2} + k$

b) $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{x+\cos x}\,dx = \ln|x+\cos x| + k$

c) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1/x}{\ln x}\,dx = \ln|\ln|x|| + k$

d) $\int \frac{1+e^x}{e^x+x}\,dx = \ln|e^x+x| + k$

e) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}(-\operatorname{sen}\sqrt{x})\,dx = -2\cos(\sqrt{x}) + k$

f) $\int \ln(x-3)\,dx$

$$\begin{cases} u = \ln(x-3) \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x-3}\,dx \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int \ln(x-3)\,dx = x\ln|x-3| - \int \frac{x}{x-3}\,dx = x\ln|x-3| - \int 1 + \frac{3}{x-3}\,dx =$$

$$= x\ln|x-3| - x - 3\ln|x-3| + k = (x-3)\ln|x-3| - x + k$$

g) $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\begin{cases} u = \ln\sqrt{x} \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}\,dx \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;\rightarrow\; dv = 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \int \frac{2\sqrt{x}}{2x}\,dx = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + k = 2\sqrt{x}(\ln\sqrt{x} - 1) + k$$

h) $\int \ln(x^2+1)\,dx$

$$\begin{cases} u = \ln(x^2+1) \;\rightarrow\; du = \dfrac{2x}{x^2+1}\,dx \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{cases}$$

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx = x\ln(x^2+1) - \int\left(2 - \frac{2}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\operatorname{arc\,tg} x + k$$

20 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{sen\,(1/x)}{x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x}{x+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{arc\ tg\ x}{1+x^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{sen\ x}{cos^4 x}\,dx$

e) $\displaystyle\int (ln\ x)^2\,dx$ f) $\displaystyle\int e^x \cos e^x\,dx$ g) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{1+x}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{sen\,(1/x)}{x^2}\,dx = -\int \frac{-1}{x^2}\,sen\left(\frac{1}{x}\right)dx = cos\left(\frac{1}{x}\right) + k$

b) $\displaystyle\int \frac{2x}{x+2}\,dx = \int\left(2 - \frac{4}{x+2}\right)dx = \int 2\,dx - 4\int \frac{dx}{x+2} = 2x - 4\,ln\,|x+2| + k$

c) $\displaystyle\int \frac{arc\ tg\ x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,arc\ tg\ x\,dx = \frac{arc\ tg^2\ x}{2} + k$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\ x}{cos^4 x}\,dx = -\int (-sen\ x)\,(cos\ x)^{-4}\,dx = \frac{-(cos\ x)^{-3}}{-3} + k = \frac{1}{3cos^3 x} + k$

e) $\displaystyle\int (ln\ x)^2\,dx$

$$\begin{cases} u = (ln\ x)^2 \ \to\ du = 2\,(ln\ x)\cdot\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \ \to\ v = x \end{cases}$$

$\displaystyle\int (ln\ x)^2\,dx = x\,(ln\ x)^2 - 2\int ln\ x\,dx = x\,ln^2|x| - 2x\,ln\,|x| + 2x + k$

f) $\displaystyle\int e^x\,cos\,e^x\,dx = sen\ e^x + k$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{-1}{(x+1)(x-1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{lll} x=-1 & \to\ -1=-2A & \to\ A=1/2 \\ x=1 & \to\ -1=2B & \to\ B=-1/2 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int\left(\frac{1/2}{x+1} + \frac{-1/2}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}\,ln\,|x+1| - \frac{1}{2}\,ln\,|x-1| + k = ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + k$$

h) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{1+x}\,dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x+1}\,dx = \int\left(x - 3 + \frac{4}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\,ln\,|x+1| + k$

21 **Resuelve por sustitución:**

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \sqrt{3x-2}\,dx$

a) Hacemos $e^x = t^2 \ \to\ e^x\,dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{e^x}{1-\sqrt{e^x}}\,dx = \int \frac{2t}{1-t}\,dt = \int\left(-2 - \frac{2}{t-1}\right)dt = -2t - 2ln\,(t-1) + k = -2\sqrt{e^x} - 2ln\,(\sqrt{e^x}-1) + k$$

b) Hacemos $3x - 2 = t^2 \ \to\ 3\,dx = 2t\,dt \ \to\ dx = \dfrac{2}{3}\,t\,dt$

$$\int \sqrt{3x-2}\,dx = \int t\cdot\frac{2}{3}\,t\,dt = \frac{2}{3}\int t^2\,dt = \frac{2t^3}{9} + k = \frac{2\sqrt{(3x-2)^3}}{9} + k$$

22 Resuelve:

a) $\displaystyle\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$

a) $\displaystyle\int \frac{x+4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + 4\ arc\ sen\ x + k = -\sqrt{1-x^2} + 4arc\ sen\ x + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} = \frac{1}{2}\ arc\ sen\,(2x-3) + k$

23 Calcula estas integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2-2x+5}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx = \int \frac{5x^2}{(x-1)^3}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{5x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \ \to\ A = 5,\ B = 10,\ C = 5$$

$$I = 5\int \frac{dx}{x-1} + 10\int (x-1)^{-2}\,dx + 5\int (x-1)^{-3}\,dx = 5ln\,|x-1| - \frac{10}{x-1} - \frac{5}{2\,(x-1)^2} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2-2x+5}\,dx = \int\left(1 + \frac{2x-8}{x^2-2x+5}\right)dx = \int dx + \int \frac{2x-8}{x^2-2x+5}\,dx$

Calculamos la segunda integral teniendo en cuenta que el denominador no tiene raíces.

$$I_1 = \int \frac{2x-8}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{2x-2-6}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx - 6\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = ln\,(x^2-2x+5) - 6I_2$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{1}{x^2-2x+1+4}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\ arc\ tg\ \frac{x-1}{2} + k = \frac{1}{2}\ arc\ tg\ \frac{x-1}{2} + k$$

Sustituimos en I_1:

$$I_1 = ln\,(x^2-2x+5) - 3arc\ tg\ \frac{x-1}{2} + k$$

Sustituimos en I:

$$I = x + ln\,(x^2-2x+5) - 3arc\ tg\ \frac{x-1}{2} + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int\left(x-1-\frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x}\right)dx = \int (x-1)\,dx - \int \frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x}\,dx$

Calculamos la segunda integral descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x} = \frac{-3x^2+4x+6}{x\,(x+2)\,(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} \ \to\ A = -3,\ B = -\frac{7}{3},\ C = \frac{7}{3}$$

$$\int \frac{-3x^2+4x+6}{x^3+x^2-2x}\,dx = -3\int \frac{dx}{x} - \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{7}{3}\int \frac{dx}{x-1} = -3\ ln\ x - \frac{7}{3}\ ln\,(x+2) + \frac{7}{3}\ ln\,(x-1) + k$$

Sustituimos en I:

$$I = \frac{x^2}{2} - x + 3\,ln\,x + \frac{7}{3}\,ln\,(x+2) - \frac{7}{3}\,ln\,(x-1) + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 12x - 6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x^2 + 12x - 6}{(x-2)(x^2+9)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+9} \to A = 2,\ M = 0,\ N = 12$$

$$I = 2\int \frac{dx}{x-2} + 12\int \frac{dx}{x^2+9}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}}\,arc\,tg\,\frac{x}{3} + k = \frac{1}{3}\,arc\,tg\,\frac{x}{3} + k$$

Sustituimos en I:

$$I = 2ln\,(x-2) + 4\,arc\,tg\,\frac{x}{3} + k$$

24 **Resuelve estas integrales utilizando un cambio de variable:**

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x + \sqrt{x}}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

Cambio: $x + 2 = t^2 \to dx = 2t\,dt$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t^2-1)\,t \cdot 2t\,dt = \int (2t^4 - 2t^2)\,dt = \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + k = \frac{2\sqrt{(x+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$

Cambio: $x = t^4 \to dx = 4t^3\,dt$

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3\,dt}{t^4 - t} = \int \frac{4t^2\,dt}{t^3 - 1} = \frac{4}{3}\int \frac{3t^2\,dt}{t^3-1} = \frac{4}{3}\,ln\,|t^3 - 1| + k = \frac{4}{3}\,ln\,|\sqrt[4]{x^3} - 1| + k$$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \to dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{(t^2-1)}{t} \cdot 2t\,dt = \int (2t^2 - 2)\,dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + k = \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} - 2\sqrt{x+1} + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

Cambio: $x + 1 = t^2 \to dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)\,t} = \int \frac{2\,dt}{(t+1)(t-1)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{(t+1)(t-1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t+1)}{(t+1)(t-1)}$$

$$2 = A(t-1) + B(t+1)$$

Hallamos A y B:

$$\left.\begin{array}{llll} t=-1 & \to \ 2=-2A & \to & A=-1 \\ t=1 & \to \ 2=2B & \to & B=1 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2\,dt}{(t+1)(t-1)} = \int\left(\frac{-1}{t+1}+\frac{1}{t-1}\right)dt = -ln\,|t+1| + ln\,|t-1| + k = ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + k$$

Así:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + k$$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

Cambio: $x=t^2 \to dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{t^2+t} = \int \frac{2\,dt}{t+1} = 2\,ln\,|t+1| + k = 2\,ln\,(\sqrt{x}+1)+k$$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

Cambio: $x=t^2 \to dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2t^2\,dt}{1+t^2} = \int\left(2-\frac{2}{1+t^2}\right)dt = 2t - 2\,arc\,tg\,t + k = 2\sqrt{x} - 2\,arc\,tg\,\sqrt{x} + k$$

25 Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\,(tg\,x)}{cos^2\,x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx \overset{(1)}{=} \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx = \int\left(\frac{1+e^x}{1+e^x}-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx = \int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right) = x - ln\,(1+e^x)+k$

(1) Sumamos y restamos e^x en el numerador.

b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + \int \frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx + \int \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$

$$= -\sqrt{9-x^2} + 3\int \frac{1/3}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx = -\sqrt{9-x^2} + 3\,arc\,sen\left(\frac{x}{3}\right)+k$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

Hacemos el cambio: $e^x = t \to x = ln\,t \to dx = \dfrac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \int \frac{1/t}{t^2-3t}\,dt = \int \frac{1}{t^3-3t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2(t-3)}\,dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t-3} = \frac{At(t-3)+B(t-3)+Ct^2}{t^2(t-3)}$$

$1 = At(t-3) + B(t-3) + Ct^2$

Hallamos A, B y C:

$$\left.\begin{array}{lll} t=0 \;\rightarrow\; 1=-3B & \rightarrow & B=-1/3 \\ t=3 \;\rightarrow\; 1=9C & \rightarrow & C=1/9 \\ t=1 \;\rightarrow\; 1=-2A-2B+C & \rightarrow & A=-1/9 \end{array}\right\}$$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{1}{t^2(t-3)}\,dt = \int\left(\frac{-1/9}{t}+\frac{-1/3}{t^2}+\frac{1/9}{t-3}\right)dt = \frac{-1}{9}\,ln\,|t| + \frac{1}{3t} + \frac{1}{9}\,ln\,|t-3| + k$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{-1}{9}\,ln\,e^x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\,ln\,|e^x-3| + k = -\frac{1}{9}\,x + \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\,ln\,|e^x-3| + k$$

d) $\displaystyle\int \frac{sen\,(tg\,x)}{cos^2 x}\,dx = -cos\,(tg\,x) + k$, ya que $D[tg\,x] = \dfrac{1}{cos^2 x}$.

e) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

Hacemos el cambio: $e^x = t \;\rightarrow\; x = ln\,t \;\rightarrow\; dx = \dfrac{1}{t}\,dt$

$$\int \frac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{t^3-t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t^2-1}{t^2+1}\,dt = \int\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= t - 2\,arc\,tg\,t + k = e^x - 2\,arc\,tg\,(e^x) + k$$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Hacemos el cambio: $x = t^2 \;\rightarrow\; dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2t\,dt}{1+t} = \int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt = 2t - 2\,ln\,|1+t| + k = 2\sqrt{x} - 2\,ln\,(1+\sqrt{x}) + k$$

Página 352

26 **Para resolver la integral $\int cos^3 x\,dx$, hacemos:**

$$\boldsymbol{cos^3 x = cos\,x\,cos^2 x = cos\,x\,(1-sen^2 x) = cos\,x - cos\,x\,sen^2 x}$$

Resuélvela y calcula después $\int sen^3 x\,dx$.

$$\int cos^3 x\,dx = \int (cos\,x - cos\,x\cdot sen^2 x)\,dx = \int cos\,x\,dx - \int sen^2 x\cdot cos\,x\,dx = sen\,x - \frac{sen^3 x}{3} + k$$

Para la segunda parte del problema calculamos:

$$sen^3 x = sen\,x\cdot sen^2 x = sen\,x\,(1-cos^2 x) = sen\,x - sen\,x\cdot cos^2 x$$

$$\int sen^3 x\,dx = \int (sen\,x - sen\,x\cdot cos^2 x)\,dx = \int sen\,x\,dx + \int cos^2 x\,(-sen\,x)\,dx = -cos\,x + \frac{cos^3 x}{3} + k$$

27 **Calcula las siguientes integrales utilizando las relaciones trigonométricas:**

a) $\displaystyle\int (sen^2 x + 2\,cos\,2x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{(1-2\,cos^2 x)\,cos\,x}{cos\,2x}$

c) $\displaystyle\int (sen^2 x\cdot sen\,2x)\,dx$

d) $\displaystyle\int (cos^2 x - cos\,2x)\,dx$

** **Ayuda: Ten en cuenta que $1 + cos\,2x = 2cos^2 x$ y que $1 - cos\,2x = 2sen^2 x$.***

a) Teniendo en cuenta que $sen^2 x + 2cos\,2x = \dfrac{1-cos\,2x}{2} + 2cos\,2x = \dfrac{3}{2}\,cos\,2x + \dfrac{1}{2}$, obtenemos:

$$\int (sen^2 x + 2cos\,2x)\,dx = \int\left(\frac{3}{2}\,cos\,2x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{3}{4}\,sen\,2x + \frac{x}{2} + k$$

b) $\int \frac{(1-2cos^2 x)\ cos\ x}{cos\ 2x}\ dx = \int \frac{(1-2cos^2 x)\ cos\ x}{cos\ 2x}\ dx = \int \frac{-cos\ 2x \cdot cos\ x}{cos\ 2x}\ dx = -\int cos\ x\ dx = -sen\ x + k$

c) Teniendo en cuenta que $sen^2 x \cdot sen\ 2x = \frac{1-cos\ 2x}{2}\ sen\ 2x = \frac{sen\ 2x}{2} - \frac{sen\ 2x \cdot cos\ 2x}{2}$, obtenemos:

$$\int sen^2 x \cdot sen\ 2x\ dx = \int \left(\frac{sen\ 2x}{2} - \frac{sen\ 2x \cdot cos\ 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int sen\ 2x \cdot 2\ dx - \frac{1}{4} \int sen\ 2x \cdot cos\ 2x \cdot 2\ dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\ cos\ 2x - \frac{1}{4}\ \frac{sen^2\ 2x}{2} + k = -\frac{1}{4}\ cos\ 2x - \frac{1}{8}\ sen^2\ 2x + k$$

d) Teniendo en cuenta que $cos^2 x - cos\ 2x = \frac{1 + cos\ 2x}{2} - cos\ 2x = \frac{1}{2} - \frac{cos\ 2x}{2}$, obtenemos:

$$\int (cos^2 x - cos\ 2x)\ dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{cos\ 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int cos\ 2x\ dx = \frac{x}{2} - \frac{sen\ 2x}{4} + k$$

28 **Calcula** $\int \frac{x^3}{(x+1)^2}\ dx$

a) Por descomposición en fracciones simples.

b) Mediante un cambio de variable.

a) $I = \int \frac{x^3}{(x+1)^2}\ dx = \int \left(x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2} \right) dx = \int (x-2)\ dx + \int \frac{3x+2}{(x+1)^2}\ dx$

Descomponemos la segunda integral en fracciones simples:

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \rightarrow A = 3,\ B = -1$$

$$\int \frac{3x+2}{(x+1)^2}\ dx = 3 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = 3\ ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$$

Sustituimos en I:

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\ ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + k$$

b) Llamamos $u = x + 1 \rightarrow du = dx \quad (x = u - 1)$

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^2}\ dx = \int \frac{(u-1)^3}{u^2}\ du = \int \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u^2}\ du = \int \left(u - 3 + \frac{3}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du =$$

$$= \frac{u^2}{2} - 3u + 3\ ln\ u + \frac{1}{u} + k = \frac{(x+1)^2}{2} - 3(x+1) + 3\ ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + k$$

29 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

b) $\int \frac{(x+5)\ dx}{x^2 + 2x + 3}$

c) $\int \frac{x+1}{x^3 + 2x^2 + 3x}\ dx$

d) $\int \frac{2x-1}{x^3 + x}\ dx$

e) $\int \frac{x^2 + 3x + 8}{x^2 + 9}\ dx$

f) $\int \frac{dx}{(x+1)^2 (x^2+1)}$

a) El denominador no tiene raíces.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = arc\ tg\ (x+2) + k$$

b) El denominador no tiene raíces.

$$I = \int \frac{(x+5)\ dx}{x^2 + 2x + 3} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - \frac{1}{2} \cdot 2 + 5}{x^2 + 2x + 3}\ dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3}\ dx + 4 \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3}\ dx = \frac{1}{2}\ I_1 + 4I_2$$

$I_1 = ln\,(x^2 + 2x + 3) + k$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2 + 2x + 1 + 2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,arc\ tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k = \frac{\sqrt{2}}{2}\,arc\ tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

Por tanto:

$$I = \frac{1}{2}\,ln\,(x^2 + 2x + 3) + 2\sqrt{2}\,arc\ tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

c) $I = \displaystyle\int \frac{x+1}{x^3 + 2x^2 + 3x}\,dx = \int \frac{x+1}{x(2x + x^2 + 3)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+1}{x(2x + x^2 + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 3} \;\rightarrow\; A = \frac{1}{3},\; M = -\frac{1}{3},\; N = \frac{1}{3}$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 3}\,dx = \frac{1}{3}\,ln\,|x| - \frac{1}{3}\,I_1$$

$$I_1 = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) - \frac{1}{2}\cdot 2 - 1}{x^2 + 2x + 3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 3}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2 + 2x + 3}\,dx =$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\,ln\,(x^2 + 2x + 3) - \sqrt{2}\,arc\ tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

(∗) La segunda integral está resuelta en el apartado anterior.

Por tanto:

$$I = \frac{1}{3}\,ln\,x - \frac{1}{6}\,ln\,(x^2 + 2x + 3) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,arc\ tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

d) $I = \displaystyle\int \frac{2x-1}{x^3 + x}\,dx = \int \frac{2x-1}{x(x^2+1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} \;\rightarrow\; A = -\frac{1}{2},\; M = 1,\; N = 2$$

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+2}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx\; 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\,ln\,x + \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1) + 2\,arc\ tg\,x + k$$

e) $I = \displaystyle\int \frac{x^2 + 3x + 8}{x^2 + 9}\,dx = \int \left(1 + \frac{3x-1}{x^2+9}\right)dx = \int dx + \int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx$

$$\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\,ln\,(x^2+9) - \frac{1}{3}\,arc\ tg\,\frac{x}{3} + k$$

Ya que:

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{1}{\frac{1}{3}}\,arc\ tg\,\frac{x}{3} + k = \frac{1}{3}\,arc\ tg\,\frac{x}{3} + k$$

Sustituyendo en I:

$$I = x + \frac{3}{2}\,ln\,(x^2+9) - \frac{1}{3}\,arc\ tg\,\frac{x}{3} + k$$

f) $I = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2},\ M = -\frac{1}{2},\ N = 0$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,ln\,(x+1) - \frac{1}{2\,(x+1)} - \frac{1}{4}\,ln\,(x^2+1) + k$$

30 **Encuentra la primitiva de $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$ que pasa por el punto (0, 3).**

$$F(x) = \int \frac{3x}{1-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\,ln\,|1-x^2| + k$$

Como pasa por (0, 3) se cumple que $F(0) = 3$.

$$-\frac{3}{2} + k = 3 \rightarrow k = \frac{9}{2}$$

Luego la primitiva buscada es $F(x) = -\frac{3}{2}\,ln\,|1-x^2| + \frac{9}{2}$.

31 **Halla la función F para la que $F'(x) = \frac{1}{x^2}$ y $F(1) = 2$.**

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x} + k$$

$$F(1) = -1 + k = 2 \rightarrow k = 3$$

Por tanto: $F(x) = \frac{-1}{x} + 3$

32 **De todas las primitivas de la función $y = 4x - 6$, ¿cuál de ellas toma el valor 4 para $x = 1$?**

$$F(x) = \int (4x-6)\,dx = 2x^2 - 6x + k$$

$$F(1) = 2 - 6 + k = 4 \rightarrow k = 8$$

Por tanto: $F(x) = 2x^2 - 6x + 8$

33 **Halla $f(x)$ sabiendo que:**

$$f''(x) = 6x,\ f'(0) = 1 \text{ y } f(2) = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \int 6x\,dx = 3x^2 + c \\ f'(0) = c = 1 \end{array}\right\} f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \int (3x^2+1)\,dx = x^3 + x + k \\ f(2) = 10 + k = 5 \end{array}\right\} \rightarrow k = -5$$

Por tanto: $f(x) = x^3 + x - 5$

34 **Encuentra una primitiva de $f(x) = x^2\,sen\,x$ cuyo valor para $x = 0$ sea 1.**

$$F(x) = \int x^2\,sen\,x\,dx$$

Integramos por partes:

$$\left\{\begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \\ dv = sen\,x\,dx \rightarrow v = -cos\,x \end{array}\right.$$

$$F(x) = -x^2 \cdot cos\ x + 2\int x \cdot cos\ x\ dx = -x^2 \cdot cos\ x + 2I$$

Integramos I por partes:

$$\begin{cases} u = x \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = cos\ x\ dx \;\rightarrow\; v = sen\ x \end{cases}$$

$$I = x \cdot sen\ x - \int sen\ x\ dx = x \cdot sen\ x + cos\ x$$

Sustituimos en F:

$$F(x) = -x^2 \cdot cos\ x + 2x \cdot sen\ x + 2cos\ x + k$$

Ahora se debe cumplir que $F(0) = 1 \rightarrow 2 + k = 1 \rightarrow k = -1$.

La primitiva es $F(x) = -x^2 \cdot cos\ x + 2x \cdot sen\ x + 2cos\ x - 1$.

35 Determina la función $f(x)$ sabiendo que:

$$\boldsymbol{f''(x) = x\ ln\ x,\ f'(1) = 0 \text{ y } f(e) = \frac{e}{4}}$$

$$f'(x) = \int f''(x)\ dx \rightarrow f'(x) = \int x\ ln\ x\ dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = ln\ x \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}\ dx \\ dv = x\ dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2}\ ln\ x - \int \frac{x}{2}\ dx = \frac{x^2}{2}\ ln\ x - \frac{x^2}{4} + k = \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + k$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + k = -\frac{1}{4} + k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \int f'(x)\ dx \rightarrow f(x) = \int \left[\frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\right] dx = \underbrace{\int \frac{x^2}{2}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) dx}_{I} + \frac{1}{4}\ x$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = \left(ln\ x - \dfrac{1}{2}\right) \;\rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}\ dx \\ dv = \dfrac{x^2}{2}\ dx \;\rightarrow\; v = \dfrac{x^3}{6} \end{cases}$$

$$I = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \int \frac{x^2}{6}\ dx = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + k$$

Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4}\ x + k \\ f(e) &= \frac{e^3}{12} - \frac{e^3}{18} + \frac{e}{4} + k = \frac{e^3}{36} + \frac{e}{4} + k = \frac{e}{4} \rightarrow k = -\frac{e^3}{36} \end{aligned}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6}\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) - \frac{x^3}{18} + \frac{1}{4}\ x - \frac{e^3}{36}$$

36 **Calcula la expresión de una función $f(x)$ tal que:**

$$f'(x) = x\, e^{-x^2} \text{ y } f(0) = \frac{1}{2}$$

$f(x) = \int x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int -2x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2} + k$

$f(0) = -\frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} \;\to\; k = 1$

Por tanto: $f(x) = -\frac{1}{2}\, e^{-x^2} + 1$

37 **De una función $y = f(x)$, $x > -1$, sabemos que tiene por derivada $y' = \frac{a}{1+x}$, donde a es una constante.**

Determina la función si, además, sabemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = -1$.

$y = \int \frac{a}{1+x}\, dx \;\to\; f(x) = a\, ln\,(1+x) + k \quad (x > -1)$

$f(0) = 1 \;\to\; a\, ln\,(1+0) + k = 1 \;\to\; k = 1$

$f(1) = -1 \;\to\; a\, ln\, 2 + k = -1 \;\to\; a\, ln\, 2 = -1 - 1 \;\to\; a = \frac{-2}{ln\, 2}$

Por tanto, $f(x) = \frac{-2}{ln\, 2}\, ln\,(1+x) + 1, \quad x > -1.$

38 **Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ln(1 + x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.**

$\int ln\,(1+x^2)\, dx$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = ln\,(1+x^2) \;\to\; du = \dfrac{2x}{1+x^2}\, dx \\ dv = dx \;\to\; v = x \end{cases}$$

$\int ln\,(1+x^2)\, dx = x\, ln\,(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\, dx = x\, ln\,(1+x^2) - 2\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$

$= x\, ln\,(1+x^2) - 2(x - arc\, tg\, x) + k$

$F(x) = x\, ln\,(1+x^2) - 2x + 2arc\, tg\, x + k$

Debe pasar por $(0, 0) \;\to\; F(0) = 0$

$F(0) = 0 - 2 \cdot 0 + 0 + k = 0 \;\to\; k = 0$

Así, $F(x) = x\, ln\,(1+x^2) - 2x + 2arc\, tg\, x.$

39 **Calcula el valor del parámetro a para que una primitiva de la función:**

$$\int (ax^2 + x\cos x + 1)\, dx$$

pase por $(\pi, -1)$.

$I = \int (ax^2 + x\cos x + 1)\, dx = \int (ax^2 + 1)\, dx + \int x\cos x\, dx = \frac{ax^3}{3} + x + \underbrace{\int x\cos x\, dx}_{I_1}$

Calculamos I_1 por partes:

$$\begin{cases} u = x \;\to\; du = dx \\ dv = \cos x\, dx \;\to\; v = sen\, x \end{cases}$$

$I_1 = x\, sen\, x - \int sen\, x\, dx = x\, sen\, x + \cos x + k$

$F(x) = \dfrac{ax^3}{3} + x + x \; sen \; x + cos \; x$

Como pasa por $(\pi, -1)$:

$F(\pi) = -1 \;\to\; \dfrac{a\pi^3}{3} + \pi + \cancel{\pi \cdot sen \; \pi} + cos \; \pi = -1$

$\dfrac{a\pi^3}{3} + \pi - 1 = -1 \;\to\; \dfrac{a\pi^3}{3} = -\pi \;\to\; a = \dfrac{-3\pi}{\pi^3} = \dfrac{-3}{\pi^2}$

Así, $F(x) = \dfrac{-3}{\pi^2} \cdot \dfrac{x^3}{3} + x + x \; sen \; x + cos \; x = -\dfrac{x^3}{\pi^2} + x + x \; sen \; x + cos \; x$

40 **Halla $\int e^{ax}(x^2 + bx + c)\,dx$ en función de los parámetros a, b y c.**

$I = \int e^{ax}(x^2 + bx + c)\,dx$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 + bx + c \;\to\; du = (2x + b)\,dx \\ dv = e^{ax}\,dx \;\to\; v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{cases}$$

Así:

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}\int \underbrace{e^{ax}(2x + b)}_{I_1}\,dx$$

Volvemos a integrar por partes:

$$\begin{cases} u = 2x + b \;\to\; du = 2dx \\ dv = e^{ax}\,dx \;\to\; v = \dfrac{1}{a}e^{ax} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}I_1 = \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax}(2x + b) - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,2\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}(x^2 + bx + c) - \frac{1}{a^2}e^{ax}(2x + b) + \frac{2}{a^3}e^{ax} + k$$

41 **Encuentra la función derivable $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$ que cumple $f(1) = -1$ y tal que:**

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

- Si $x \ne 0$:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx \begin{cases} \int (x^2 - 2x)\,dx & \text{si } -1 \le x < 0 \\ \int (e^x - 1)\,dx & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + k & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x + c & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

- Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(1) = -1$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 0$.

$f(1) = -1 \;\to\; e - 1 + c = -1 \;\to\; c = -e$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 - e \end{array}\right\} \; k = 1 - e$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

42 **De una función derivable se sabe que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \le 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

a) Si $x \neq 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ ln\, x + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos k y c teniendo en cuenta que $f(-1) = -4$ y que $f(x)$ ha de ser continua en $x = 1$:

$$f(-1) = -\frac{5}{2} + k = -4 \rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = c \end{array}\right\} c = 0$$

Por tanto: $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ ln\, x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(2) = ln\, 2$; $f'(2) = \dfrac{1}{2}$

La ecuación de la recta tangente será: $y = ln\, 2 + \dfrac{1}{2}(x - 2)$

43 **Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 3x^2 - 6x$ tal que $F(x)$ tenga un mínimo en el punto (2, 0).**

Determina los demás puntos singulares de $F(x)$.

$$F(x) = \int (3x^2 - 6x)\, dx = x^3 - 3x^2 + k$$

La función pasa por el punto (2, 0) por ser un mínimo.

$F(2) = 0 \rightarrow -4 + k = 0 \rightarrow k = 4$

Así: $F(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Calculamos los demás puntos singulares:

$F'(x) = f(x) = 3x^2 - 6x$

$F'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

$F''(x) = 6x - 6$

$F''(0) < 0 \rightarrow x = 0,\ y = 4 \rightarrow$ El punto (0, 4) es un máximo relativo.

$F''(2) > 0 \rightarrow$ Efectivamente, el punto (2, 0) es un mínimo relativo.

44 **Halla la función $f(x)$ de la que conocemos $f''(x) = e^x$, $f'(1) = 0$ y $f(0) = 1$.**

$$f''(x) = e^x \rightarrow f'(x) = \int x^x\, dx = e^x + c_1$$

$$f'(1) = 0 = e^1 + c_1 \rightarrow c_1 = -e$$

$$f'(x) = e^x - e \rightarrow f(x) = \int (e^x - e)\, dx = e^x - xe + c_2$$

$$f(0) = 1 = e^0 - 0e + c_2 \rightarrow c_2 = 0$$

$$f(x) = e^x - xe$$

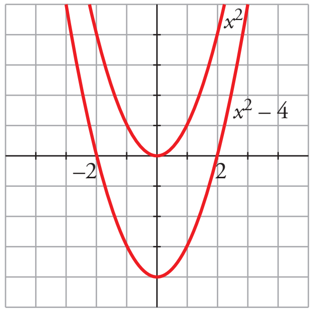
45 **Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = 2x$ tal que $F(x) \le 0$ en el intervalo $[-2, 2]$.**

$F(x) = \int 2x \, dx = x + k$

$x^2 + k \le 0$ en $[-2, 2]$

Debe ser $k \le -4$; por ejemplo, la función $F(x) = x^2 - 4$ es menor o igual que 0 en $[-2, 2]$.

Representamos x^2 y $x^2 - 4$:



46 **Halla $f(x)$ sabiendo que:**

$$f''(x) = cos\,\frac{x}{2},\ f'(2\pi) = 0 \ \text{y} \ f(0) = 1$$

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int cos\,\frac{x}{2}\,dx = 2\int \frac{1}{2}\,cos\,\frac{x}{2}\,dx = 2\,sen\,\frac{x}{2} + k$$

$$f'(x) = 2\,sen\,\frac{x}{2} + k;\ \text{como } f'(2\pi) = 0 \ \rightarrow\ 2\,sen\,\frac{2\pi}{2} + k = 0 \ \rightarrow\ k = 0$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 2\,sen\,\frac{x}{2}\,dx = 2 \cdot 2\int \frac{1}{2}\,sen\,\frac{x}{2}\,dx = 4\left(-cos\,\frac{x}{2}\right) + k'$$

$$f(x) = -4cos\,\frac{x}{2} + k';\ \text{como } f(0) = 1 \ \rightarrow\ f(0) = -4cos\,0 + k' = 1 \ \rightarrow\ -4 + k' = 1 \ \rightarrow\ k' = 5$$

Por tanto, la función que buscamos es $f(x) = -4cos\,\dfrac{x}{2} + 5$

47 **a) Halla la familia de curvas en las que la pendiente de las rectas tangentes a dichas curvas en cualquiera de sus puntos viene dada por la función:**

$$f(x) = \frac{x - 2}{2x + 4}$$

b) Determina cuál es la curva de esta familia que pasa por el punto $A\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

a) La pendiente de la recta tangente a la curva en uno de sus puntos viene dada por la derivada de la curva en ese punto.

Por tanto, $m = F'(x) = \dfrac{x - 2}{2x + 4}$.

Buscamos $F(x) = \displaystyle\int \frac{x - 2}{2x + 4}\,dx$.

$$F(x) = \int \frac{x - 2}{2x + 4}\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2x + 4}\right) dx = \frac{1}{2}x - 2\int \frac{2}{2x + 4}\,dx = \frac{x}{2} - 2\,ln\,|2x + 4| + k$$

b) Debe ser:

$$F\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \ \rightarrow\ \frac{-5/2}{2} - 2\,ln\left|2\left(-\frac{5}{2}\right) + 4\right| + k = \frac{3}{4} \ \rightarrow\ \frac{-5}{4} - 2\,ln\,1 + k = \frac{3}{4} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ k = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2 \ \rightarrow\ F(x) = \frac{x}{2} - 2\,ln\,|2x + 4| + 2$$

48 **Calcula la función $f(x)$ sabiendo que $f''(x) = x$, que la gráfica de f pasa por el punto $P(1, 1)$ y que la tangente en P es paralela a la recta de ecuación:**

$$3x + 3y - 1 = 0$$

$f'(x) = \int f''(x)\, dx \to f'(x) = \int x\, dx = \dfrac{x^2}{2} + k$

$f(x) = \int f'(x)\, dx \to \int\left(\dfrac{x^2}{2} + k\right) dx = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{x^3}{3} + kx + k'$

f pasa por $P(1, 1) \to f(1) = 1 \to \dfrac{1}{6} + k + k' = 1 \quad (1)$

La pendiente de la recta tangente en P es $m = -1$; por ello:

$f'(1) = -1 \to \dfrac{1}{2} + k = -1 \quad (2)$

De las igualdades (1) y (2) obtenemos los valores de k y k':

$k = -1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$; $k' = 1 - \dfrac{1}{6} - k = 1 - \dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{3}$

Por tanto, la función que buscamos es: $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{3}$

49 **Halla la función $F(x)$ tal que $F(0) = 2$ y que sea primitiva de la función siguiente:**

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$F(x) = \int \dfrac{e^x}{e^x + 1}\, dx = ln\,(e^x + 1) + k$

$F(0) = 2 \to ln\,2 + k = 2 \to k = 2 - ln\,2$

Por tanto:

$F(x) = ln\,(e^x + 1) + 2 - ln\,2$

50 **Halla la ecuación de una curva $y = f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $P(1, 1)$ y que la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es $3x + 1$.**

Como la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera es $3x + 1$, se cumple que:

$f'(x) = 3x + 1$

$f(x) = \int (3x + 1)\, dx = \dfrac{3x^2}{2} + x + k$

Por otra parte:

$f(1) = 1 \to \dfrac{3}{2} + 1 + k = 1 \to k = -\dfrac{3}{2}$

Por tanto:

$f(x) = \dfrac{3x^2}{2} + x - \dfrac{3}{2}$

51 **Dadas las funciones:**

$$f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5 \qquad g(x) = 6x^2 - 7x + 2$$

halla la función $H(x) = \int \dfrac{f(x)}{g(x)}\, dx$ que cumple la igualdad $H(1) = 1$.

$H(x) = \int \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}\, dx = \int\left(2x + 1 + \dfrac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}\right) dx = \int (2x + 1)\, dx + \int \dfrac{12x - 7}{6x^2 - 7x + 2}\, dx =$

$= x^2 + x + ln\,|6x^2 - 7x + 2| + k$

$H(1) = 1 \to 2 + k = 1 \to k = -1$

Por tanto:

$H(x) = x^2 + x + ln\,|6x^2 - 7x + 2| - 1$

52 **Calcula** $\displaystyle\int \frac{1}{sen^2 x \cos^2 x}\, dx$.

* ***Utiliza la igualdad*** $sen^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\int \frac{1}{sen^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx = \int \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx = \int \frac{sen^2 x}{sen^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx + \int \frac{\cos^2 x}{sen^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{1}{sen^2 x}\, dx = tg\, x - cotg\, x + k$$

53 **Resuelve:**

a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^6}}\, dx$

b) $\displaystyle\int \sqrt{81-25x^2}\, dx$

* ***a) Haz*** $t = 3x^3$. ***b) Haz*** $x = \dfrac{9}{5}\, sen\, t$.

a) Hacemos $t = 3x^3 \to dt = 9x^2\, dx \to \dfrac{1}{9}\, dt = x^2\, dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^6}}\, dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{1}{9}\, arc\, sen\, t + k = \frac{1}{9}\, arc\, sen\, 3x^3 + k$$

b) Hacemos $x = \dfrac{9}{5}\, sen\, t \to dx = \dfrac{9}{5}\cos t\, dt \quad \left(t = arc\, sen\, \dfrac{5x}{9}\right)$

$$\int \sqrt{81-25x^2}\, dx = \int \sqrt{81 - 25\left(\frac{9}{5}\, sen\, t\right)^2}\, \frac{9}{5}\cos t\, dt = \int \sqrt{81 - 81\, sen^2 t}\, \frac{9}{5}\cos t\, dt =$$

$$= \frac{81}{5}\int \sqrt{1 - sen^2 t}\, \cos t\, dt = \frac{81}{5}\int \cos^2 t\, dt = \frac{81}{5}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{81}{10}\, t + \frac{81}{20}\, sen\, 2t + k = \frac{81}{10}\, arc\, sen\, \frac{5x}{9} + \frac{81}{20}\, sen\left(2\, arc\, sen\, \frac{5x}{9}\right) + k$$

54 **Calcula:**

a) $\displaystyle\int |1-x|\, dx$

b) $\displaystyle\int (3+|x|)\, dx$

c) $\displaystyle\int |2x-1|\, dx$

d) $\displaystyle\int \left|\frac{2x}{3} - 4\right| dx$

e) $\displaystyle\int |x-2|\, x\, dx$

f) $\displaystyle\int e^{|x|}\, dx$

a) $\displaystyle\int |1-x|\, dx$

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1 \\ -1+x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |1-x|\, dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ -x + \dfrac{x^2}{2} + c & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

En $x = 1$, la función ha de ser continua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2} + k \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\dfrac{1}{2} + c \end{array}\right\} \quad \frac{1}{2} + k = -\frac{1}{2} + c \to c = 1 + k$$

Por tanto:

$$\int |1-x|\, dx = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 1 \\ -x + \dfrac{x^2}{2} + 1 + k & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

b) $\int (3 + |x|)\, dx$

$$3 + |x| = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ 3 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \int (3 + |x|)\, dx = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 0 \\ 3x + \dfrac{x^2}{2} + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En $x = 0$, la función ha de ser continua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = c \end{array}\right\} \quad c = k$$

Por tanto:

$$\int (3 + |x|)\, dx = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x < 0 \\ 3x + \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

c) $\int | 2x - 1 |\, dx$

$$|2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

$$f(x) = \int |2x - 1|\, dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x + c & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$f(x)$ ha de ser continua en $x = \dfrac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (1/2)^-} f(x) = \dfrac{1}{4} + k \\ \lim\limits_{x \to (1/2)^+} f(x) = -\dfrac{1}{4} + c \end{array}\right\} \quad \frac{1}{4} + k = -\frac{1}{4} + c \;\rightarrow\; c = \frac{1}{2} + k$$

Por tanto:

$$\int |2x - 1|\, dx = \begin{cases} -x^2 + x + k & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 - x + \dfrac{1}{2} + k & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

d) $\int \left| \dfrac{2x}{3} - 4 \right| dx$

Expresamos $f(x)$ por intervalos.

$$\frac{2x}{3} - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = 6$$

$$\left| \frac{2x}{3} - 4 \right| dx = \begin{cases} -\dfrac{2x}{3} + 4 & \text{si } x < 6 \\ \dfrac{2x}{3} - 4 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas por tramos:

$$\int \left(-\frac{2x}{3} + 4 \right) dx = -\frac{x^2}{3} + 4x + k_1$$

$$\int \left(\frac{2x}{3} - 4 \right) dx = \frac{x^2}{3} - 4x + k_2$$

$$F(x) = \int \left| \frac{2x}{3} - 4 \right| dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{3} + 4x + k_1 & \text{si } x < 6 \\ \frac{x^2}{3} - 4x + k_2 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 6$.

$$F(6) = \frac{6^2}{3} - 4 \cdot 6 + k_2 = -12 + k_2$$

$$\lim_{x \to 6} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 6^-} \left(-\frac{x^2}{3} + 4x + k_1 \right) = 12 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 6^+} \left(\frac{x^2}{3} - 4x + k_2 \right) = -12 + k_2 \end{cases} \rightarrow 12 + k_1 = -12 + k_2 \rightarrow k_2 = 24 + k_1$$

Por tanto:

$$\int \left| \frac{2x}{3} - 4 \right| dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{3} + 4x + k & \text{si } x < 6 \\ \frac{x^2}{3} - 4x + 24 + k & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

e) $\int |x - 2|\, x\, dx$

$$|x - 2| x = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas por tramos:

$$\int (-x^2 + 2x)\, dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + k_1$$

$$\int (x^2 - 2x)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + k_2$$

$$F(x) = \int |x - 2|\, x\, dx = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + x^2 + k_1 & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^3}{3} - x^2 + k_2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 2$.

$$F(2) = \frac{2^3}{3} - 4 + k_2 = -\frac{4}{3} + k_2$$

$$\lim_{x \to 2} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + k_1 \right) = \frac{4}{3} + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + k_2 \right) = -\frac{4}{3} + k_2 \end{cases} \rightarrow \frac{4}{3} + k_1 = -\frac{4}{3} + k_2 \rightarrow k_2 = \frac{8}{3} + k_1$$

Por tanto:

$$\int |x - 2|\, x\, dx = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + x^2 + k & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{8}{3} + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

f) $\int e^{|x|}\, dx$

$$e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int e^{|x|}\, dx = \begin{cases} -e^{-x} + k_1 & \text{si } x < 0 \\ e^{x} + k_2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 0$.

$$F(0) = 1 + k_2$$

$$\lim_{x \to 0} F(x) \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} (-e^{-x} + k_1) = -1 + k_1 \\ \lim_{x \to 0^+} (e^{x} + k_2) = 1 + k_2 \end{cases} \to -1 + k_1 = 1 + k_2 \to k_2 = -2 + k_1$$

Por tanto:

$$\int e^{|x|}\, dx = \begin{cases} -e^{-x} + k & \text{si } x < 0 \\ e^{x} - 2 + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

55 **Determina una función $f(x)$ que verifique la ecuación siguiente:**

$$x^3 f'(x) + x^2 + 2x = 3$$

$$x^3 \cdot f'(x) + x^2 + 2x = 3 \to x^3 \cdot f'(x) = 3 - x^2 - 2x \to f'(x) = \frac{3 - x^2 - 2x}{x^3} \to f'(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \int \left(\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx = 3\int \frac{dx}{x^3} - 2\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} = -\frac{3}{2x^2} + \frac{2}{x} - \ln x + k$$

56 **De una función derivable $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sabe que pasa por el punto (–1, 0) y que su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Halla la expresión de $f(x)$.

b) Obtén la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

a) $f(x) = \int f'(x)\, dx = \begin{cases} e^{-x} + k_1 & \text{si } x < 0 \\ -x + k_2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Como la función es derivable, debe ser continua en $x = 0$.

$$f(0) = k_2$$

$$\lim_{x \to 0} F(x) \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} (-e^{-x} + k_1) = 1 + k_1 \\ \lim_{x \to 0^+} (-x + k_2) = k_2 \end{cases} \to 1 + k_1 = k_2$$

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + k & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como pasa por el punto (–1, 0) $\to f(-1) = 0 \to e + k = 0 \to k = -e$

La expresión de la función buscada es:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - e & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 - e & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) $x = 1$, $f(1) = -e$, $f'(1) = -1$

La ecuación de la recta tangente es: $y = -e - (x - 1)$.

57 **Determina una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sabiendo que la derivada segunda es constante e igual a 3 y que la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$, es $5x - y - 3 = 0$.**

$$f''(x) = 3 \to f'(x) = \int 3\, dx = 3x + k_1$$

Recta tangente en $x = 1$:

$$y = 5x - 3 \to \begin{cases} f'(1) = 5 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$f'(1) = 5 \rightarrow 3 + k_1 = 5 \rightarrow k_1 = 2$

Luego:

$$f'(x) = 3x + 2$$

$$f(x) = \int (3x + 2)\, dx = \frac{3x^2}{2} + 2x + k_2$$

$$f(1) = 2 \rightarrow \frac{3}{2} + 2 + k_2 = 2 \rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}$$

La función es:

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$$

58 **Calcula una primitiva de la función $f(x) = 1/x$ que no tome ningún valor positivo en el intervalo $[1, e]$.**

$$F(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = ln\,|x| + k$$

Queremos que $ln\,|x| + k \le 0$ cuando $x \in [1, e]$.

Como $F(x)$ es creciente en dicho intervalo por ser su primera derivada positiva, basta que:

$$ln\, e + k \le 0 \rightarrow k \le -1$$

Por tanto, cualquier valor de k que satisfaga la condición anterior da lugar a una primitiva que resuelve el problema. Por ejemplo, $F(x) = ln\,|x| - 1$.

59 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$ **d)** $\displaystyle\int x^2 \sqrt{x+1}\, dx$

a) Para eliminar la raíz hacemos $x + 2 = t^2 \rightarrow dx = 2t\, dt \quad (x = t^2 - 2)$

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\, dx = \int \frac{t^2+1}{t}\, 2t\, dt = \int (2t^2 + 2)\, dt = \frac{2t^3}{3} + 2t + k = \frac{2\sqrt{(x+2)^3}}{3} + 2\sqrt{x+2} + k$$

b) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^2 \rightarrow dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int \frac{2t\, dt}{(t^2+1)\, t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\; arc\; tg\; t + k = 2\; arc\; tg\; \sqrt{x} + k$$

c) Para eliminar la raíz hacemos $x = t^6 \rightarrow dx = 6t^5\, dt$

$$\int \sqrt{x}\,(1 + \sqrt[3]{x^2})\, dx = \int \sqrt{t^6}\,(1 + \sqrt[3]{(t^6)^2})\, 6t^5\, dt = \int t^3\,(1 + t^4)\, 6t^5\, dt =$$

$$= 6\int (t^8 + t^{12})\, dt = \frac{2t^9}{3} + \frac{6t^{13}}{13} + k = \frac{2\sqrt[6]{x^9}}{3} + \frac{6\sqrt[6]{x^{13}}}{13} + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{6\sqrt[6]{x^{23}}}{13} + k$$

d) Para eliminar la raíz hacemos $x + 1 = t^2 \rightarrow dx = 2t\, dt \quad (x = t^2 - 1)$

$$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx = \int (t^2-1)^2\, t \cdot 2t\, dt = 2\int t^2\,(t^2-1)^2\, dt = 2\int (t^6 - 2t^4 + t^2)\, dt =$$

$$= \frac{2t^7}{7} - \frac{4t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + k = \frac{2\sqrt{(x+1)^7}}{7} - \frac{4\sqrt{(x+1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} + k$$

60 **a) Para resolver la siguiente integral, multiplica numerador y denominador por *cos x* y haz después un cambio de variable:**

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

b) Utiliza el procedimiento anterior para resolver las integrales siguientes:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

Hacemos $u = \operatorname{sen} x \to du = \cos x\, dx$

$$\int \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{1}{1 - u^2}\, du \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u} = \frac{1}{2} \ln|1+u| - \frac{1}{2} \ln|1-u| + k =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1 + \operatorname{sen} x| - \frac{1}{2} \ln|1 - \operatorname{sen} x| + k$$

(*) Se ha resuelto descomponiendo en fracciones simples.

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2}$

Hacemos $u = \operatorname{sen} x \to du = \cos x\, dx$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2} = \int \frac{du}{(1 - u^2)^2} = \int \frac{du}{(1+u)^2 (1-u)^2} \stackrel{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{(1+u)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{1-u} + \frac{1}{4}\int \frac{du}{(1-u)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|1+u| - \frac{1}{4(1+u)} - \frac{1}{4} \ln|1-u| + \frac{1}{4(1-u)} + k =$$

$$= \frac{1}{4} \ln|1 + \operatorname{sen} x| - \frac{1}{4(1 + \operatorname{sen} x)} - \frac{1}{4} \ln|1 - \operatorname{sen} x| + \frac{1}{4(1 - \operatorname{sen} x)} + k$$

(*) Se ha resuelto descomponiendo en fracciones simples.

$I = \displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 - \cos^2 x}$

Hacemos $u = \cos x \to du = -\operatorname{sen} x\, dx \to -du = \operatorname{sen} x\, dx$

$I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 - \cos^2 x} = -\int \frac{du}{1 - u^2} \stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{2} \ln|1+u| + \frac{1}{2} \ln|1-u| + k = -\frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) + \frac{1}{2} \ln(1 - \cos x) + k$

(*) Esta integral está resuelta en el primer apartado.

61 **Sean *a* y *b* dos números reales cualesquiera. Calcula la siguiente integral indefinida. Ten en cuenta los casos $a = 0$ o $b = 0$.**

$$\int \frac{\cos x}{(a + b\operatorname{sen} x)^2}\, dx$$

Si $a = 0$ y $b = 0$ el problema no tiene sentido. Por tanto, al menos uno de ellos debe ser no nulo.

Si $b = 0 \to a \neq 0$:

$$\int \frac{\cos x}{a^2}\, dx = \frac{\operatorname{sen} x}{a^2} + k$$

Si $b \neq 0$:

$$\int \frac{\cos x}{(a + b \operatorname{sen} x)^2}\, dx = \frac{1}{b}\int \frac{b\cos x}{(a + b \operatorname{sen} x)^2}\, dx = -\frac{1}{b}\, \frac{1}{a + b \operatorname{sen} x} + k = -\frac{1}{b(a + b \operatorname{sen} x)} + k$$

ya que $D[a + b \operatorname{sen} x] = b \cos x$.

62 **Dada $f(x) = sen\, x - sen^3\, x$, halla:**

a) Su integral indefinida.

b) La primitiva que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

a) $\int (sen\, x - sen^3\, x)\, dx = \int (1 - sen^2\, x)\, sen\, x\, dx = \int cos^2\, x \cdot sen\, x\, dx = -\int cos^2\, x\, (-sen\, x)\, dx = -\frac{cos^3\, x}{3} + k$

b) Sea $F(x) = -\frac{cos^3\, x}{3} + k$ la primitiva buscada.

Pasa por: $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) \to F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \to -\frac{cos^3 \frac{\pi}{3}}{3} + k = 1 \to k = \frac{25}{24}$

Luego: $F(x) = -\frac{cos^2\, x}{3} + \frac{25}{24}$

63 **Calcula $f(x)$ sabiendo que su derivada $f'(x) = 3 - 2sen\, x$ corta a la bisectriz del primer cuadrante en el punto $x = \pi$.**

$f(x) = \int (3 - 2sen\, x)\, dx = 3x + 2cos\, x + k$

Corta a la bisectriz del primer cuadrante en el punto $x = \pi \to$ pasa por (π, π).

$f(\pi) = \pi \to 3\pi + 2cos\, \pi + k = \pi \to k = 2 - 2\pi$

La función es: $f(x) = 3x + 2cos\, x + 2 - 2\pi$

64 **Calcula la siguiente primitiva, en la que suponemos que $a \neq 1$:**

$$\int \frac{dx}{x^2 - (a+1)x + a}$$

El polinomio $P(x) = x^2 - (a+1)x + a$ tiene raíces $x = 1$ y $x = a$, ya que $P(1) = P(a) = 0$. Vamos a distinguir dos casos:

- $a \neq 1 \to$ Las raíces reales son distintas:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - (a+1)\, x + a} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-a)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)(x-a)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-a} \to 1 = A(x-a) + B(x-1)$$

$$x = 1 \to 1 = A(1-a) \to A = \frac{1}{1-a}$$

$$x = a \to 1 = B(a-1) \to B = \frac{1}{a-1}$$

$$I = \frac{1}{1-a}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{a-1}\int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{1-a}\, ln\,|x-1| + \frac{1}{a-1}\, ln\,|x-a| + k$$

- $a = 1 \to$ Tiene una raíz doble:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + k$$

65 **Determina una función $f(x)$ de la que sabemos que $f''(x) = -sen\, x$ y que la recta $x + y - 2 - \pi = 0$ es tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = \pi$.**

$y = -x + 2 + \pi$ es la recta tangente en $x = \pi \to \begin{cases} f'(\pi) = -1 \\ f(\pi) = 2 \end{cases}$

$f'(x) = \int (-sen\, x)\, dx = cos\, x + k_1$

$f'(\pi) = -1 \to cos\, \pi + k_1 = -1 \to k_1 = 0$

Luego: $f'(x) = cos\ x$

$$f(x) = \int cos\ x\ dx = sen\ x + k_2$$

$$f(\pi) = 2 \;\rightarrow\; sen\ \pi + k_2 = 2 \;\rightarrow\; k_2 = 2$$

Por tanto: $f(x) = sen\ x + 2$

66 **Calcula** $\int 3x|x-2|\,dx$**.**

$$3x|x-2| = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 2 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Hallamos las primitivas por tramos.

$$\int (-3x^2 + 6x)\,dx = -x^3 + 3x^2 + k_1 \qquad \int (3x^2 - 6x)\,dx = x^3 - 3x^2 + k_2$$

$$F(x) = \int 3x|x-2|\,dx = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + k_1 & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 3x^2 + k_2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Como la primitiva es derivable, debe ser continua en $x = 2$.

$$F(2) = -4 + k_2$$

$$\lim_{x \to 2} F(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (-x^3 + 3x^2 + k_1) = 4 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x^3 - 3x^2 + k_2) = -4 + k_2 \end{cases} \rightarrow\; 4 + k_1 = -4 + k_2 \;\rightarrow\; k_2 = 8 + k_1$$

Por tanto:

$$\int 3x|x-2|\,dx = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + k & \text{si } x < 2 \\ x^3 - 3x^2 + 8 + k & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

67 **De una función continua $f(x)$ sabemos que tiene un mínimo en (–1, –2) y que su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla la expresión analítica de $f(x)$.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

a) Integrando por tramos obtenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + k_1 & \text{si } x \le 1 \\ 4x + k_2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como la función es continua en $\mathbb{R}$, lo es en $x = 1$.

$$f(1) = 3 + k_1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 2x + k_1) = 3 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (4x + k_2) = 4 + k_2 \end{cases} \rightarrow\; 3 + k_1 = 4 + k_2 \;\rightarrow\; k_2 = -1 + k_1$$

Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + k & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 1 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como tiene un mínimo en (–1, –2), pasa por ese punto.

$$f(-1) = -2 \;\rightarrow\; -1 + k = -2 \;\rightarrow\; k = -1$$

La expresión final de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) $x = 1$, $f(1) = 2$, $f'(1) = 4 \;\rightarrow$ La recta tangente es: $y = 2 + 4(x - 1)$

Cuestiones teóricas

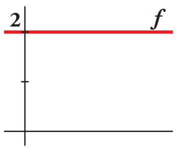
68 **Prueba que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C un número real cualquiera, la función $F(x) + C$ es también una primitiva de $f(x)$.**

$F(x)$ primitiva de $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

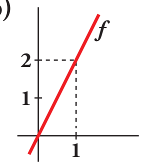
$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \rightarrow F(x) + C$ es primitiva de $f(x)$.

69 **Representa tres primitivas de las siguientes funciones f:**

a)



b)



a) $f(x) = 2 \rightarrow F(x) = 2x + k$

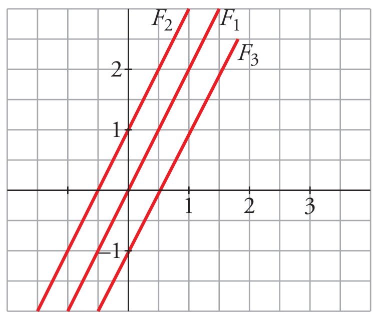
Por ejemplo:

$F_1(x) = 2x$

$F_2(x) = 2x + 1$

$F_3(x) = 2x - 1$

cuyas gráficas son:



b) $f(x) = 2x \rightarrow F(x) = x^2 + k$

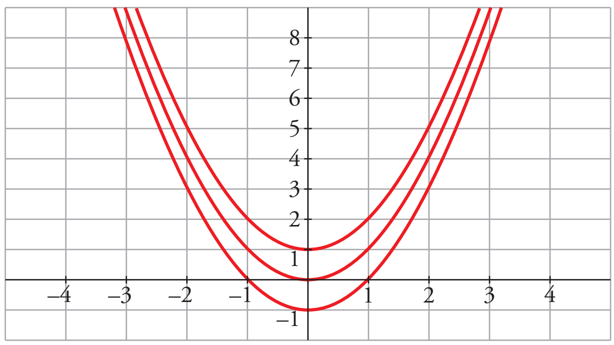
Por ejemplo:

$F_1(x) = x^2$

$F_2(x) = x^2 + 1$

$F_3(x) = x^2 - 1$

cuyas gráficas son:



70 **En una integral hacemos el cambio $t = tg\, x$. ¿Cuál es la expresión de dx en función de t?**

$$t = tg\, x \rightarrow dt = (1 + tg^2\, x)\, dx \rightarrow dt = (1 + t^2)\, dx \rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

71 **Comprueba que $\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \ln|\sec x + tg\, x| + k$.**

Tenemos que probar que la derivada de $f(x) = \ln|\sec x + tg\, x| + k$ es $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Derivamos $f(x) = \ln\left|\frac{1 + sen\, x}{\cos x}\right| + k$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\cos^2 x + sen\, x(1 + sen\, x)}{\cos^2 x}}{\dfrac{1 + sen\, x}{\cos x}} = \frac{\dfrac{\cos^2 x + sen\, x + sen^2\, x}{\cos x}}{1 + sen\, x} = \frac{1 + sen\, x}{(1 + sen\, x)\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

72 **Calcula $f(x)$ sabiendo que $\int f(x)\,dx = ln\,|tg\,x| + k$.**

Debemos suponer que $x \neq k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ para que tenga sentido la función y se pueda evaluar la tangente.

- Si $tg\,x > 0 \rightarrow f'(x) = D[ln\,(tg\,x) + k] = \dfrac{1 + tg^2\,x}{tg\,x}$
- Si $tg\,x < 0 \rightarrow f'(x) = D[ln\,(-tg\,x) + k] = \dfrac{-1 - tg^2\,x}{-tg\,x} = \dfrac{1 + tg^2\,x}{tg\,x}$

73 **Las integrales $\int \dfrac{(arc\ tg\ x)^2}{1 + x^2}\,dx$ y $\int (tg^3\,x + tg^5\,x)\,dx$, ¿son del tipo $\int f(x)^n f'(x)\,dx$? En caso afirmativo, identifica, en cada una de ellas, $f(x)$, n y $f'(x)$.**

Ambas son del tipo $\int f(x)^n f'(x)\,dx$.

- $\displaystyle\int \frac{(arc\ tg\ x)^2}{1 + x^2}\,dx = \int (arc\ tg\ x)^2 \cdot \frac{1}{1 + x^2}\,dx$

  $f(x) = arc\ tg\,x$; $n = 2$; $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

- $\displaystyle\int (tg^3\,x + tg^5\,x)\,dx = \int tg^3\,x\,(1 + tg^2\,x)\,dx$

  $f(x) = tg\,x$; $n = 3$; $f'(x) = 1 + tg^2\,x$

74 **Sin utilizar el cálculo de derivadas, prueba que:**

$$F(x) = \frac{1}{1 + x^4} \quad \text{y} \quad G(x) = \frac{-x^4}{1 + x^4}$$

son dos primitivas de una misma función.

Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de una misma función, su diferencia es una constante. Veámoslo:

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{1 + x^4} - \left(\frac{-x^4}{1 + x^4}\right) = \frac{1 + x^4}{1 + x^4} = 1$$

Por tanto, hemos obtenido que: $F(x) = G(x) + 1$

Luego las dos son primitivas de una misma función.

75 **Calcula $f(x)$ sabiendo que $\int f(x)\,dx = ln\,\dfrac{|x - 1|^3}{(x + 2)^2} + k$.**

$$F(x) = \int f(x)\,dx = ln\,\frac{|x - 1|^3}{(x + 2)^2} + c$$

Sabemos que $F'(x) = f(x)$.

Por tanto, calculamos la derivada de $F(x)$.

Aplicamos las propiedades de los logaritmos antes de derivar:

$F(x) = 3ln\,|x - 1| - 2ln\,(x + 2) + c$

$$F'(x) = \frac{3}{x - 1} - \frac{2}{x + 2} = \frac{3(x + 2) - 2(x - 1)}{x^2 + x - 2} = \frac{x + 8}{x^2 + x - 2}$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{x + 8}{x^2 + x - 2}$.

76 **Sean f y g dos funciones continuas y derivables que se diferencian en una constante. ¿Podemos asegurar que f y g tienen una misma primitiva?**

No. Por ejemplo:

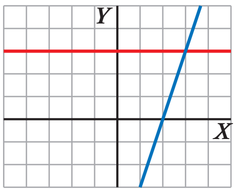
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x + 1 \;\rightarrow\; F(x) = x^2 + x + k \\ g(x) = 2x + 2 \;\rightarrow\; G(x) = x^2 + 2x + c \end{array}\right\}$$

$f(x)$ y $g(x)$ son continuas, derivables y se diferencian en una constante (pues $f(x) = g(x) - 1$).

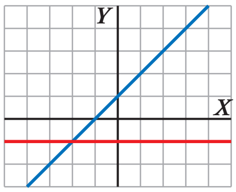
Sin embargo, sus primitivas, $F(x)$ y $G(x)$, respectivamente, son distintas, cualesquiera que sean los valores de k y c.

77 **¿Cuáles de los siguientes apartados representan la gráfica de una función $f(x)$ y la de una de sus primitivas $F(x)$?**

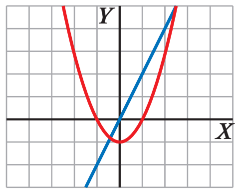
a)



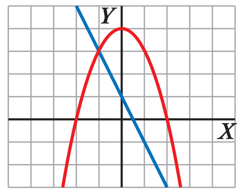
b)



c)



d)



a) Las funciones representadas son:

$$y = 3 \text{ e } y = 3x - 6, \text{ que cumplen: } \int 3\, dx = 3x + k$$

Por tanto, $f(x) = 3$, y $F(x) = 3x - 6$ es una primitiva de f.

b) Las funciones son:

$$y = -1 \text{ e } y = x + 1 \;\rightarrow\; \int -1\, dx = -x + k$$

No corresponden a una función y su primitiva.

c) Las funciones son:

$$y = x^2 - 1 \text{ e } y = 2x \;\rightarrow\; \int 2x\, dx = x^2 + k$$

Por tanto, $f(x) = 2x$, y una de sus primitivas es $F(x) = x^2 - 1$.

d) Las funciones son:

$$y = -x^2 - 1 + 4 \text{ e } y = -2x + 1 \;\rightarrow\; \int -2x + 1\, dx = -x^2 + x + k$$

No corresponden a una función y su primitiva.

78 **Si $\int f(x)\, dx = F(x)$ y $\int g(x)\, dx = G(x)$, halla en función de $F(x)$ y de $G(x)$:**

a) $\int [f(x) - g(x)]\, dx$

b) $\int -\frac{1}{2}[5g(x) + 4f(x)]\, dx$

c) $\int f(2x - 1)\, dx$

d) $\int [5 - g(x)]\, dx$

e) $\int g\left(\frac{x-3}{2}\right) dx$

f) $\int [3f(5x - 1) - 6g(2 - 3x)]\, dx$

g) $\int G'(x)\, g'(x)\, dx$

h) $\int \frac{f'(x)}{F'(x)}\, dx$

a) $\int [f(x) - g(x)]\, dx = F(x) - G(x)$

b) $\int -\frac{1}{2}[5g(x) + 4f(x)]\, dx = -\frac{1}{2}[5G(x) + 4F(x)]$

c) $\int f(2x - 1)\, dx = \frac{1}{2}\int f(2x - 1)\, 2\, dx = \frac{1}{2} F(2x - 1)$

d) $\int [5 - g(x)]\, dx = 5x - G(x)$

e) $\int g\left(\frac{x-3}{2}\right) dx = 2\int g\left(\frac{x-3}{2}\right)\frac{1}{2}\, dx = 2G\left(\frac{x-3}{2}\right)$

f) $\int [3f(5x-1) - 6g(2-3x)]\, dx = 3\int f(5x-1)\, dx - 6\int g(2-3x)\, dx =$

$$= \frac{3}{5}\int f(5x-1)\, 5\, dx + 2\int g(2-3x)(-3)\, dx = \frac{3}{5}F(5x-1) + 2G(2-3x)$$

g) $\int G'(x)\, g'(x)\, dx = \int g(x)\, g'(x)\, dx = \frac{[g(x)]^2}{2} + k = \frac{[G'(x)]^2}{2} + k$

h) $\int \frac{f'(x)}{F'(x)}\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = ln\,|f(x)| + k = ln\,|F'(x)| + k$

79 ¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

a) Una función logarítmica puede ser una primitiva de una función racional.

b) $\int f(x) \cdot g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$

c) Las primitivas de una función racional irreducible cuyo denominador es de primer grado son un polinomio más un logaritmo neperiano.

a) Verdadero. Por ejemplo, la función logarítmica $F(x) = ln\,(x^2 + 1)$ es una primitiva de la función racional $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

b) Falso. Tomemos $f(x) = g(x) = x$.

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + k$$

$$\int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx = \int x\, dx \cdot \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + k = \frac{x^4}{4} + k$$

Ambos resultados son claramente distintos.

c) Verdadero. Será de la forma $\frac{p(x)}{x}$ y podemos reescribirlo como $q(x) + \frac{k}{x}$, que tiene como integral un polinomio más un logaritmo neperiano.

80 Al aplicar el método de integración por partes para calcular $\int f(x) \cos x\, dx$, donde f es una función derivable, se obtiene:

$$\int f(x) \cos x\, dx = f(x)\, sen\, x - \int \frac{1}{x}\, sen\, x\, dx$$

Encuentra la expresión analítica de $f(x)$ si sabemos que pasa por el punto (1, 2).

Del enunciado del problema se deduce que el método de integración por partes se ha usando de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u = f(x) \;\rightarrow\; du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = \cos x\, dx \;\rightarrow\; v = sen\, x \end{cases}$$

Por tanto:

$$f(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = ln\,|x| + k$$

Por otra parte:

$$f(1) = 2 \;\rightarrow\; k = 2$$

La función es:

$$f(x) = ln\,|x| + 2$$

81 **Comprueba que las funciones:**

$$F(x) = arc\ tg\ x \quad \text{y} \quad G(x) = -arc\ tg\left(\frac{1}{x}\right)$$

son primitivas de una misma función $f(x)$.

a) ¿Son iguales las funciones F y G?

b) ¿Se cortan sus gráficas?

Para comprobarlo, calculamos sus derivadas.

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$G'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

a) Ambas funciones no son iguales, porque ni siquiera tienen el mismo dominio de definición.

Concretamente, $F(0) = arc\ tg\ 0 = 0$ y $G(0)$ no existe.

b) En el dominio de definición de ambas funciones no pueden cortarse. Como no son iguales y son primitivas de una misma función, difieren en constantes no nulas en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

Página 355

Para profundizar

82 **Calcula las siguientes integrales trigonométricas mediante un cambio de variable:**

a) $\int sen^2\ x\ cos^3\ x\ dx$ **b)** $\int sen^3\ x\ cos^2\ dx$

c) $\int cos^5\ x\ dx$ **d)** $\int cos^3\ x\ sen^3\ x\ dx$

a) Hacemos $u = sen\ x \to du = cos\ x\ dx$

$$\int sen^2\ x \cdot cos^3\ x\ dx = \int sen^2\ x \cdot cos^2\ x \cdot cos\ x\ dx = \int u^2(1-u^2)\ du =$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + k = \frac{sen^3\ x}{3} - \frac{sen^5\ x}{5} + k$$

b) Hacemos $u = cos\ x \to du = -sen\ x\ dx$

$$\int sen^3\ x \cdot cos\ x\ dx = -\int sen^2\ x \cdot cos^2\ x(-sen\ x)\ dx = -\int (1-u^2)\ u^2\ du =$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + k = -\frac{cos^3\ x}{3} + \frac{cos^5\ x}{5} + k$$

c) Hacemos $u = sen\ x \to du = cos\ x\ dx$

$$\int cos^5\ x\ dx = \int (cos^2\ x)^2\ cos\ x\ dx = \int (1-u^2)^2\ du = \int (1-2u^2+u^4)\ du =$$

$$= u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + k = sen\ x - \frac{2sen^3\ x}{3} + \frac{sen^5\ x}{5} + k$$

d) $I = \int cos^3\ x \cdot sen^3\ x\ dx = \int cos^2\ x \cdot sen^2\ x \cdot cos\ x \cdot sen\ x\ dx = \int \frac{1+cos\ 2x}{2} \cdot \frac{1-cos\ 2x}{2} \cdot \frac{sen\ 2x}{2}\ dx =$

$$= \frac{1}{8}\int (1-cos^2\ 2x)\ sen\ 2x\ dx$$

Hacemos $u = cos\ 2x \to du = -2sen\ 2x\ dx \to -\frac{du}{2} = sen\ 2x\ dx$

$$I = -\frac{1}{16}\int (1-u^2)\ du = -\frac{u}{16} + \frac{u^3}{48} + k = -\frac{cos\ 2x}{16} + \frac{cos^3\ 2x}{48} + k$$

83 **Calcula:**

a) $\int sen^2\, x\, cos^2\, x\, dx$ **b)** $\int sen^6\, x\, dx$

* ***Recuerda:*** $1 + cos\, 2x = 2cos^2\, x$ ***y*** $1 - cos\, 2x = 2sen^2\, x$.

a) $\int sen^2\, x \cdot cos^2\, x\, dx = \int \frac{1 - cos\, 2x}{2} \cdot \frac{1 + cos\, 2x}{2}\, dx = \frac{1}{4}\int (1 - cos^2\, 2x)\, dx = \frac{1}{4}\int sen^2\, 2x\, dx \overset{(*)}{=}$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1 - cos\, 4x}{2}\, dx = \frac{1}{8}\int (1 - cos\, 4x)\, dx = \frac{x}{8} - \frac{sen\, 4x}{32} + k$$

(*) Sustituyendo en $1 - cos\, 2x = 2sen^2\, x$ la letra x por $2x$ se obtiene $1 - cos\, 4x = 2sen^2\, 2x$.

b) $I = \int sen^6\, x\, dx = \int (sen^2\, x)^3\, dx = \int \left(\frac{1 - cos\, 2x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int (1 - cos\, 2x)^3\, dx =$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - 3cos\, 2x + 3cos^2\, 2x - cos^3\, 2x)\, dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int cos\, 2x\, dx + \frac{3}{8}\int cos^2\, 2x\, dx - \frac{1}{8}\int cos^3\, 2x\, dx$$

Calculamos cada integral por separado:

$$\int cos\, 2x\, dx = \frac{sen\, 2x}{2} + k$$

$$\int cos^2\, 2x\, dx \overset{(*)}{=} \int \frac{1 + cos\, 4x}{2}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{sen\, 4x}{8} + k$$

(*) Sustituyendo en $1 + cos\, 2x = 2cos^2\, x$ la letra x por $2x$ se obtiene $1 + cos\, 4x = 2cos^2\, 2x$.

$$I_1 = \int cos^3\, 2x\, dx = \int cos^2\, 2x \cdot cos\, 2x\, dx = \int (1 - sen^2\, 2x)\, cos\, 2x\, dx$$

Hacemos $u = sen\, 2x \rightarrow du = 2cos\, 2x\, dx \rightarrow \frac{du}{2} = cos\, 2x\, dx$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\, du = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} + k = \frac{sen\, 2x}{2} - \frac{sen^3\, 2x}{6} + k$$

Ya podemos obtener el resultado final:

$$I = \frac{1}{8}x - \frac{3}{16}\, sen\, 2x + \frac{3}{16}\, x + \frac{3}{64}\, sen\, 4x - \frac{1}{16}\, sen\, 2x + \frac{1}{48}\, sen^3\, 2x + k =$$

$$= \frac{5}{16}\, x - \frac{1}{4}\, sen\, 2x + \frac{3}{64}\, sen\, 4x + \frac{1}{48}\, sen^3\, 2x + k$$

84 **Para resolver integrales del tipo** $\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx$ **se utiliza el cambio de variable** $x = \frac{a}{b}\, sen\, t$**.**

Calcula las integrales siguientes:

a) $\int \sqrt{100 - 25x^2}\, dx$

b) $\int \sqrt{25 - 64x^2}\, dx$

c) $\int \sqrt{2 - x^2}\, dx$

d) $\int \sqrt{\frac{9}{16} - 25x^2}\, dx$

a) Hacemos $x = 2sen\, t \rightarrow dx = 2cos\, t\, dt$

$$\int \sqrt{100 - 25x^2}\, dx = \int \sqrt{100 - 25\,(2sen\, t)^2}\, 2cos\, t\, dt = \int \sqrt{100 - 100sen^2\, t}\, 2cos\, t\, dt =$$

$$= 20\int \sqrt{1 - sen^2\, t} = 20\int cos^2\, t\, dt = 20\int \frac{1 + cos\, 2t}{2}\, dt = 10t + 5sen\, 2t + k =$$

$$= 10\, arc\, sen\, \frac{x}{2} + 5sen\left(2\, arc\, sen\, \frac{x}{2}\right) + k$$

b) Hacemos $x = \frac{5}{8} sen\ t \ \rightarrow \ dx = \frac{5}{8} cos\ t\ dt$

$$\int \sqrt{25 - 64x^2}\, dx = \int \sqrt{25 - 64\left(\frac{5}{8} sen\ t\right)^2}\ \frac{5}{8} cos\ t\ dt = \sqrt{25 - 25sen^{2\,t}}\ \frac{5}{8} cos\ t\ dt =$$

$$= \frac{25}{8}\int \sqrt{1 - sen^2\ t}\ cos\ t\ dt = \frac{25}{8}\int cos^2\ t\ dt = \frac{25}{8}\int \frac{1 + cos\ 2t}{2}\ dt =$$

$$= \frac{25}{16} t + \frac{25}{32} sen\ 2t + k = \frac{25}{16}\ arc\ sen\ \frac{8x}{5} + \frac{25}{32}\ sen\left(2\ arc\ sen\ \frac{8x}{5}\right) + k$$

c) Hacemos $x = \sqrt{2}\ sen\ t \ \rightarrow \ dx = \sqrt{2}\ cos\ t\ dt$

$$\int \sqrt{2 - x^2}\, dx = \sqrt{2 - (\sqrt{2}\ sen\ t)^2}\ \sqrt{2}\ cos\ t\ dt = \int \sqrt{2 - 2sen^2\ t}\ \sqrt{2}\ cos\ t\ dt =$$

$$= 2\int \sqrt{1 - sen^2\ t}\ cos\ t\ dt = 2\int cos^2\ t\ dt = 2\int \frac{1 + cos\ 2t}{2}\ dt = t + \frac{1}{2}\ sen\ 2t + k =$$

$$= arc\ sen\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ sen\left(2arc\ sen\ \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + k$$

d) Hacemos $x = \frac{3}{20} sen\ t \ \rightarrow \ dx = \frac{3}{20} cos\ t\ dt$

$$\int \sqrt{\frac{9}{16} - 25x^2}\, dx = \int \sqrt{\frac{19}{16} - 25\left(\frac{3}{20} sen\ t\right)^2}\ \frac{3}{20} cos\ t\ dt = \int \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{9}{16} sen^2\ t}\ \frac{3}{20} cos\ t\ dt =$$

$$= \frac{9}{80}\int \sqrt{1 - sen^2\ t}\ cos\ t\ dt = \frac{9}{80}\int cos^2\ t\ dt = \frac{9}{80}\int \frac{1 + cos\ 2t}{2}\ dt =$$

$$= \frac{9}{160} t + \frac{9}{320} sen\ 2t + k =$$

$$= \frac{9}{160}\ arc\ sen\ \frac{20x}{3} + \frac{9}{320}\ sen\left(2arc\ sen\ \frac{20x}{3}\right) + k$$

85 **Una ecuación diferencial de primer orden es una ecuación en la que, además de x e y, figura también y'. Resolverla es buscar una función $y = f(x)$ que la verifique:**

Por ejemplo, resolvamos $x y^2 + y' = 0$:

$$y' = -x\, y^2 \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = -x\, y^2 \ \rightarrow \ dy = -x\, y^2\, dx$$

Separamos las variables:

$$\frac{dy}{y^2} = -x\, dx \ \rightarrow \ \int \frac{dy}{y^2} = \int (-x)\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} + k \ \rightarrow \ y = \frac{2}{x^2 - 2k}$$

Hay infinitas soluciones. Busca la que pasa por el punto (0, 2) y comprueba que la curva que obtienes verifica la ecuación propuesta.

- Buscamos la solución que pasa por el punto (0, 2):

$$y = \frac{2}{x^2 - 2k} \ \rightarrow \ 2 = \frac{2}{-2k} \ \rightarrow \ -4k = 2 \ \rightarrow \ k = \frac{-1}{2}$$

  Por tanto, $y = \frac{2}{x^2 + 1}$

- Comprobamos que verifica la ecuación $xy^2 + y' = 0$:

$$xy^2 + y' = x\left(\frac{2}{x^2 + 1}\right)^2 - \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = x \cdot \frac{4}{(x^2 + 1)^2} - \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

86 **Resuelve estas ecuaciones diferenciales de primer orden:**

a) $yy' - x = 0$ **b)** $y^2 y' - x^2 = 1$ **c)** $y' - xy = 0$

d) $y' \sqrt{x} - y = 0$ **e)** $y' e^y + 1 = e^x$ **f)** $x^2 y' + y^2 + 1 = 0$

* ***En todas ellas, al despejar*** y' ***se obtiene en el segundo miembro el producto o el cociente de dos funciones, cada una de ellas con una sola variable.***

a) $yy' - x = 0$

$$y' = \frac{x}{y} \to \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \to y\,dy = x\,dx \to \int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + k \to y^2 = x^2 + 2k \to y = \pm\sqrt{x^2 + 2k}$$

b) $y^2 y' - x^2 = 1$

$$y' = \frac{1 + x^2}{y^2} \to \frac{dy}{dx} = \frac{1 + x^2}{y^2} \to y^2\,dy = (1 + x^2)\,dx$$

$$\int y^2\,dy = \int (1 + x^2)\,dx \to \frac{y^3}{3} = x + \frac{x^3}{3} + k \to y^3 = 3x + x^3 + 3k \to y = \sqrt[3]{3x + x^3 + 3k}$$

c) $y' - x\,y = 0$

$$y' = xy \to \frac{dy}{dx} = xy \to \frac{dy}{y} = x\,dx \to \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$ln\,|y| = \frac{x^2}{2} + k \to |y| = e^{(x^3/2) + k} \to y = \pm\, e^{(x^2/2) + k}$$

d) $y' \sqrt{x} - y = 0$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}} \to \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} \to \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \to \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$ln\,|y| = 2\sqrt{x} + k \to |y| = e^{2\sqrt{x} + k} \to y = \pm\, e^{2\sqrt{x} + k}$$

e) $y' e^y + 1 = e^x$

$$y' = \frac{e^x - 1}{e^y} \to \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - 1}{e^y}$$

$$e^y\,dy = (e^x - 1)\,dx \to \int e^y\,dy = \int (e^x - 1)\,dx$$

$$e^y = e^x - x + k \to y = ln\,|e^x - x + k|$$

f) $x^2 y' + y^2 + 1 = 0$

$$y' = \frac{-1 - y^2}{x^2} \to \frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + y^2)}{x^2} \to \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{-1}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{-1}{x^2}\,dx \to arc\ tg = \frac{1}{x} + k$$

$$y = tg\left(\frac{1}{x} + k\right)$$

Autoevaluación

Página 355

Resuelve las integrales siguientes:

1 $\displaystyle\int (\cos x + tg\, x)\, dx$

$$\int (\cos x + tg\, x)\, dx = \int \cos x\, dx + \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = \operatorname{sen} x - \ln|\cos x| + k$$

2 $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx$

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx = 2\ln|x| + \frac{x^{3/2}}{3/2} = 2\ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$$

3 $\displaystyle\int x\sqrt[3]{2x^2+1}\, dx$

$$\int x\sqrt[3]{2x^2+1}\, dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2+1)^{1/3}\, dx = \frac{1}{4}(2x^2+1)^{4/3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(2x^2+1)^4} + k$$

4 $\displaystyle\int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x}\, dx$

$$\int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \frac{tg^3 x}{3} + k$$

5 $\displaystyle\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx$

$$\int 2^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx = \frac{2^{\operatorname{sen} x}}{\ln 2} + k, \quad \text{ya que } \; D[\operatorname{sen} x] = \cos x.$$

6 $\displaystyle\int \frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

$$\int \frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x)\, dx = -\cos(\ln x) + k$$

7 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4x-21}\, dx$

$$I = \int \frac{x}{x^2+4x-21}\, dx$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$x^2 + 4x - 21 = 0 \; \begin{cases} x = -7 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\frac{x}{(x-3)(x+7)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+7} \;\rightarrow\; x = A(x+7) + B(x-3) \;\rightarrow\; A = \frac{3}{10},\; B = \frac{7}{10}$$

$$I = \int \frac{3/10}{x-3}\, dx + \int \frac{7/10}{x+7}\, dx = \frac{3}{10}\ln|x-3| + \frac{7}{10}\ln|x+7| + k$$

8 $\displaystyle\int \frac{-1}{3x^2+27}\, dx$

$$\int \frac{-1}{3x^2+27}\, dx = -\frac{1}{27}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\, dx = -\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}}\, arc\, tg\, \frac{x}{3} + k = -\frac{1}{9}\, arc\, tg\, \frac{x}{3} + k$$

9 Resuelve, por el método de sustitución, la integral:

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx$$

$$I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx$$

Hacemos el cambio $\sqrt{x} = t \;\to\; x = t^2 \;\to\; dx = 2t\, dt$

$$I = \int \frac{1+t^2}{1+t} \cdot 2t\, dt = 2\int \frac{t+t^3}{1+t}\, dx \overset{(1)}{=} 2\int \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2ln\,|t+1| \right)$$

(1) Dividimos $(t^3 + t) : (t + 2)$ y expresamos de la forma:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \text{resto}$$

Deshaciendo el cambio:

$$I = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4ln\,(\sqrt{x}+1) + k$$

10 Aplica la integración por partes para calcular:

$$\int cos\,(ln\, x)\, dx$$

$$I = \int cos\,(ln\, x)\, dx$$

$$\begin{cases} cos\,(ln\, x) = 0 \;\to\; -\dfrac{1}{x}\, sen\,(ln\, x)\, dx = du \\ dx = dv \;\to\; x = v \end{cases}$$

$$I = x\, cos\,(ln\, x) + \underbrace{\int sen\,(ln\, x)\, dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} sen\,(ln\, x) = u \;\to\; \dfrac{1}{x}\, cos\,(ln\, x)\, dx = du \\ dx = dv \;\to\; x = v \end{cases}$$

$$I_1 = x\, sen\,(ln\, x)\; \underbrace{\int cos\,(ln\, x)\, dx}_{I}$$

$$I = x \cdot cos\,(ln\, x) + x \cdot sen\,(ln\, x) - I \;\to\; I = \frac{x \cdot cos\,(ln\, x) + x \cdot sen\,(ln\, x)}{2} + k$$

11 De la función $f(x)$, se sabe que:

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}, \quad f(2) = 0$$

a) Determina f.

b) Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por (0, 1).

a) $f(x) = \displaystyle\int \frac{3}{(x+1)^2}\, dx = 3\int (x+1)^{-2}\, dx = \frac{3\,(x+1)^{-1}}{-1} + k = \frac{-3}{x+1} + k$

$f(2) = \dfrac{-3}{2+1} + k = -1 + k \;\to\;$ Como $f(2) = 0,\; -1 + k = 0 \;\to\; k = 1$

$f(x) = \dfrac{-3}{x+1} + 1 = \dfrac{x-2}{x+1}$

b) $g(x) = \displaystyle\int \frac{x-2}{x+1}\, dx = \int \left(1 + \frac{-3}{x+1} \right) dx = x - 3ln\,|x+1| + k$

$g(0) = 0 - 3ln\,|0+1| + k = k \;\to\;$ Como $g(0) = 1,\; k = 1.$

La primitiva de f que pasa por (0, 1) es $g(x) = x - 3ln\,|x+1| + 1.$

12 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{sen\ 2x}{1 + cos^2\ 2x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 6}\,dx$

a) Hacemos el cambio $u = cos\ 2x \rightarrow du = -2sen\ 2x\ dx \rightarrow -\dfrac{du}{2} = sen\ 2x\ dx$

$$\int \frac{sen\ 2x}{1 + cos^2\ 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{1 + u^2} = -\frac{1}{2}\ arc\ tg\ u + k = -\frac{1}{2}\ arc\ tg\ cos\ 2x + k$$

b) Como el denominador no tiene raíces reales:

$$I = \int \frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 6}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x - 4) + \frac{3}{2}\cdot 4 + 2}{x^2 - 4x + 6}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 6}\,dx + 8\int \frac{1}{x^2 - 4x + 6}\,dx$$

Calculamos la segunda integral:

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 6}\,dx = \int \frac{1}{x^2 - 4x + 4 + 2}\,dx = \int \frac{1}{(x - 2)^2 + 2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x - 2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\ arc\ tg\ \frac{x - 2}{\sqrt{2}} + k = \frac{\sqrt{2}}{2}\ arc\ tg\ \frac{x - 2}{\sqrt{2}} + k$$

El resultado final es:

$$I = \frac{3}{2}\ ln\,(x^2 - 4x + 6) + 4\sqrt{2}\ arc\ tg\ \frac{x - 2}{\sqrt{2}} + k$$

13 **De una función derivable $f(x)$ se sabe que $f(3) = 26$ y que su derivada es:**

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{si } x \le 2 \\ 2x + 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Halla la expresión de $f(x)$.

Integramos por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + k_1 & \text{si } x \le 2 \\ x^2 + 7x + k_2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Como es derivable, tiene que ser continua y, en particular, lo será en $x = 2$.

$$f(2) = 14 + k_1$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 2^-} (2x^2 + 3x + k_1) = 14 + k_1 \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^+} (x^2 + 7x + k_2) = 18 + k_2 \end{cases} \rightarrow 14 + k_1 = 18 + k_2 \rightarrow k_2 = -4 + k_1$$

Luego:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + k & \text{si } x \le 2 \\ x^2 + 7x - 4 + k & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Por otra parte:

$$f(3) = 26 \rightarrow 26 + k = 26 \rightarrow k = 0$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 + 7x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

14 **Calcula $\int |x + 2|\, dx$.**

$$|x + 2| = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$$F(x) = \int |x - 2|\, dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - 2x + k_1 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{x^2}{2} + 2x + k_2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Como es derivable, tiene que ser continua y, en particular, lo será en $x = -2$.

$$F(-2) = -2 + k_2$$

$$\lim_{x \to 2} F(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \left(-\dfrac{x^2}{2} - 2x + k_1\right) = 2 + k_1 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \left(\dfrac{x^2}{2} - 2x + k_2\right) = -2 + k_2 \end{cases} \to 2 + k_1 = -2 + k_2 \to k_2 = 4 + k_1$$

Por tanto:

$$\int |x - 2|\, dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - 2x + k & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{x^2}{2} + 2x + 4 + k & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

15 **Halla la curva en la que la pendiente de las rectas tangentes en cualquier punto viene dada por la función:**

$$f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}$$

Se sabe también que la curva pasa por el punto $P(\pi, 0)$.

Llamemos $F(x)$ a la curva en cuestión.

Entonces:

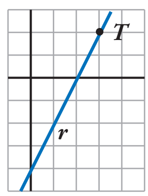
$$F(x) = \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}\, dx = \int \frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{2 \cos^2 x}\, dx + \int \frac{\cos^2 x}{2 \cos^2 x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{1}{2}\, dx = \frac{tg\, x}{2} + \frac{x}{2} + k$$

Como pasa por P se cumple que: $F(\pi) = 0 \to \dfrac{tg\, \pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} + k = 0 \to k = -\dfrac{\pi}{2}$

La función es: $F(x) = \dfrac{tg\, x}{2} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}$

16 **Determina una función $f(x)$ de la que sabemos:**



- **$f''(x) = 2$**
- **r es la tangente a f en el punto T.**

La recta tangente en el punto $T(3, 2)$ tiene pendiente $m = 2 \to \begin{cases} f(3) = 2 \\ f'(3) = 2 \end{cases}$

$f'(x) = \int 2\, dx = 2x + k_1$

$f'(3) = 2 \to 6 + k_1 = 2 \to k_1 = -4$

$f'(x) = 2x - 4$

$f(x) = \int (2x - 4)\, dx = x^2 - 4x + k_2$

$f(3) = 2 \to -3 + k_2 = 2 \to k_2 = 5$

La función es: $f(x) = x^2 - 4x + 5$