Resuelve

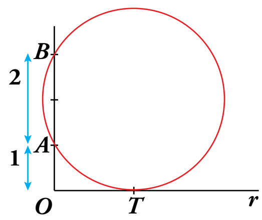
Página 173

Optimización

■ **Una persona se acerca a una estatua de 2 m de altura. Los ojos de la persona están 1 m por debajo de los pies de la escultura. ¿A qué distancia se debe acercar para que el ángulo, φ, bajo el cual ve la estatua sea máximo?**

Hay una hermosa resolución por métodos geométricos. Obsérvala:

Se traza una circunferencia que pasa por los puntos A y B y es tangente a la recta r.

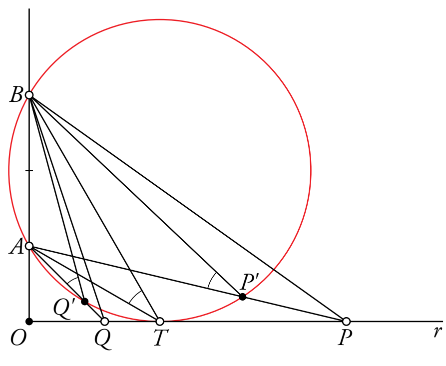


Demuestra que el punto de tangencia, T, es el lugar de la recta r desde el que se ve el segmento AB con ángulo máximo.

Para probar que el ángulo trazado desde el punto de tangencia T es el mayor posible entre todos los trazados desde puntos de la recta usaremos la siguiente propiedad:

"Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco son iguales".

Sea P un punto cualquiera situado sobre la recta r (análogamente se razonaría si se encuentra en la posición de Q). Unimos el punto P con A y B y obtenemos el punto de corte P' con la circunferencia. El ángulo $\widehat{APB}$ es menor que el ángulo $\widehat{AP'B}$ pero $\widehat{AP'B} = \widehat{ATB}$ porque los dos son ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco AB. En consecuencia el ángulo trazado desde P es menor que el trazado desde el punto de tangencia T. Así, cualquier ángulo trazado desde puntos de la recta distintos de T es menor que $\widehat{ATB}$, de donde se deduce que este es el mayor ángulo posible.



1 Recta tangente a una curva

Página 175

1 **Halla las rectas tangentes a cada curva que cumplen la condición que se indica:**

a) $y = \dfrac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$

en los puntos de abscisa 0, 1, 3.

b) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x - 6$

paralelas a la recta $y - x = 9$

c) $y = 2x - x^2$

que pasan por el punto $P(2, 1)$.

d) $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x - 2$

que pasan por el punto $P(2, 0)$.

a) Calculamos la derivada de la función:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x-2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x-2)^2}$$

Ordenadas de los puntos:

$$y(0) = 0; \; y(1) = 4; \; y(3) = 150$$

- Recta tangente en $(0, 0)$: $y'(0) = 8$

$$y = 8x$$

- Recta tangente en $(1, 4)$: $y'(1) = -9$

$$y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$$

- Recta tangente en $(3, 150)$: $y'(3) = 11$

$$y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$$

b) • Pendiente de la recta:

$$y = 9 + x \;\rightarrow\; m = 1$$

- Resolvemos $f'(x) = 1$:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = 1$$

- Punto de tangencia:

$$y = \frac{1}{3} - 1 + 1 - 6 = \frac{-17}{3} \;\rightarrow\; \left(1, \frac{-17}{3}\right)$$

- Recta tangente:

$$y = \frac{-17}{3} + (x - 1) \;\rightarrow\; y = \frac{-20}{3} + x$$

c) • El punto T de tangencia es de la curva. Sus coordenadas son $(c, 2c - c^2)$. Y sea $P = (x_0, y_0) = (2, 1)$.

- La pendiente de la recta PT debe ser igual a la derivada de f en c:

$$\frac{f(c) - y_0}{c - x_0} = f'(c) \;\rightarrow\; \frac{2c - c^2 - 1}{c - 2} = 2 - 2c \;\rightarrow\; c^2 - 4c + 3 = 0 \;\rightarrow\; c_1 = 1, \; c_2 = 3$$

- Hay dos rectas tangentes:

$$c_1 = 1, \; f(c_1) = 1, \; f'(c_1) = 0 \;\rightarrow\; y = 1$$

$$c_2 = 3, \; f(c_2) = -3, \; f'(c_2) = -4 \;\rightarrow\; y = -3 - 4(x - 3) \;\rightarrow\; y = 9 - 4x$$

d) La pendiente de la recta tangente en $x = 2$, $y = 0$ es: $y'(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$.

Entonces la recta tangente es: $y = x - 2$.

2 Crecimiento y decrecimiento de una función en un punto

Página 176

1 Demuestra que si una función $y = f(x)$ es decreciente en x_0, entonces:

$$\boldsymbol{f'(x_0) \le 0}$$

Si $f(x)$ es decreciente en x_0 entonces existe un entorno de x_0, $E = (x_0 - a, x_0 + a)$ tal que, si $x \in E$, $x \ne x_0$, entonces:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Por tanto, si $f(x)$ es derivable en x_0, se tiene que $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$.

2 Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$:

a) ¿Dónde crece?

b) ¿Dónde decrece?

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$

a) $x < -1 \;\to\; y' > 0 \;\to\; f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \;\to\; y' > 0 \;\to\; f$ es creciente en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \;\to\; y' < 0 \;\to\; f$ es decreciente en $(-1, 3)$

3 Máximos y mínimos relativos de una función

Página 177

1 Comprueba que la función $y = x^3/(x-2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.

Averigua de qué tipo es cada uno de estos dos puntos singulares; para ello, debes estudiar el signo de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)\big(3(x-2)-2x\big)}{(x-2)^4} = \frac{x^2(3x-6-2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; x^2(x-6) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0,01) > 0 \\ f'(0,01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 0 \text{ hay un punto de inflexión.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5,99) < 0 \\ f'(6,01) > 0 \end{array}\right\} \text{ En } x = 6 \text{ hay un mínimo relativo.}$$

2 a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.

b) Haz lo mismo para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

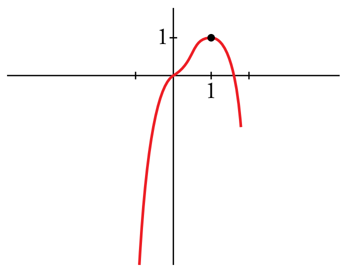
a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x + 1)$

$$y' = 0 \left.\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = 1 \;\rightarrow\; \text{Punto } (1, 1) \end{cases}\right\} \text{ Dos puntos singulares.}$$

Los dos puntos están en el intervalo $[-1; 1,5]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-1) = -7$ y $f(1,5) = -1,7$.

- En (0, 0) hay un punto de inflexión.
- En (1, 1) hay un máximo relativo.



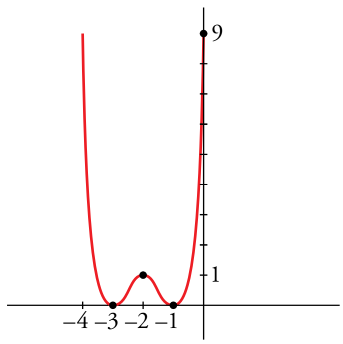
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

$$y' = 0 \left.\begin{cases} x = -1 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-1, 0) \\ x = -2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-2, 1) \\ x = -3 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-3, 0) \end{cases}\right\} \text{ Tres puntos singulares.}$$

Los tres puntos están en el mismo intervalo $[-4, 0]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hay un mínimo relativo en $(-3, 0)$, un máximo relativo en $(-2, 1)$ y un mínimo relativo en $(-1, 0)$.



4 Información extraída de la segunda derivada

Página 179

1 Estudia la curvatura de esta función:

$$y = 3x^4 - 8x^3 + 5$$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2;\ f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto}\ (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} \rightarrow \text{Punto}\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48;\ f'''(0) \neq 0;\ f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Los puntos $(0, 5)$ y $\left(\frac{4}{3}, -\frac{121}{27}\right)$ son puntos de inflexión.

- La función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, pues $f''(x) > 0$.
- La función es convexa en el intervalo $\left(0, \frac{4}{3}\right)$, pues $f''(x) < 0$.

2 Estudia la curvatura de la función siguiente:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9;\ f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ Punto $(2, 2)$

$(f'''(x) = 6;\ f'''(2) \neq 0)$

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

- La función en convexa es $(-\infty, 2)$, pues $f''(x) < 0$.
- La función en cóncava es $(2, +\infty)$, pues $f''(x) > 0$.

5 Optimización de funciones

Página 181

1 Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.

Llamamos x al número que buscamos. Ha de ser $x > 0$. Tenemos que minimizar la función:

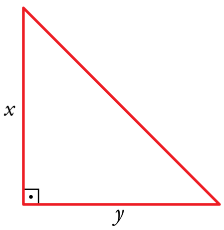
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \quad \begin{cases} x = 5 \to f(5) = 10 \\ x = -5 \to \text{(no vale, pues } x > 0) \end{cases}$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y la función es continua en $(0, +\infty)$; hay un mínimo en $x = 5$)

Por tanto, el número buscado es $x = 5$. El mínimo es 10.

2 De entre todos los triángulos rectángulos cuyos catetos tienen longitudes que suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.



$$x + y = 10 \to y = 10 - x$$

$$Área = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot (10 - x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

Tenemos que maximizar la función:

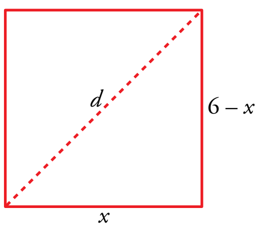
$$f(x) = x + \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \to x = 5 \to y = 10 - 5 = 5$$

$\left(f(0) = 0;\ f(10) = 0;\ f(5) = \frac{25}{2};\ \text{y } f \text{ es continua. Luego en } x = 5 \text{ está el máximo} \right)$.

Los catetos miden 5 cm cada uno. El área máxima es de 12,5 cm^2.

3 Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?



$$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

Tenemos que minimizar la función:

$$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

$$f'(x) = \frac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$$

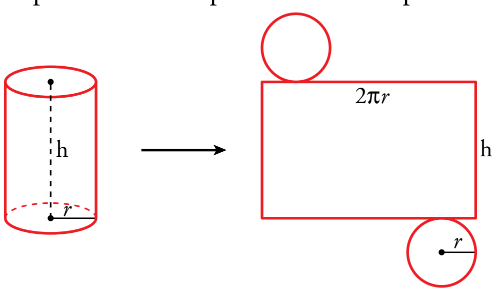
$$f'(x) = 0 \to -6 + 2x = 0 \to x = 3$$

$(f(0) = 6;\ f(6) = 6;\ f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24;$ y $f(x)$ es continua. Luego en $x = 3$ hay un mínimo).

El rectángulo con la diagonal menor es el cuadrado de lado 3 m.

4 Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.

Suponemos el recipiente con dos tapas:



$$Área\ total = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

$$V = 6{,}28\ l = 6{,}28\ \text{dm}^3$$

Como $V = \pi \cdot r^2 \cdot \text{h} = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot \text{h} = 6{,}28 \;\rightarrow\; \text{h} = \dfrac{6{,}28}{3{,}14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2}$

Así: $\textit{Área total} = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$

Tenemos que hallar el mínimo de la función:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right), \quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = \left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \;\rightarrow\; -2 + 2r^3 = 0 \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(r) = +\infty$, y f es continua en $(0, +\infty)$; en $r = 1$ hay un mínimo).

$$r = 1 \;\rightarrow\; \text{h} = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$$

El cilindro tendrá radio 1 dm y altura 2 dm.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 182

1. Tangente en un punto de la curva

Hazlo tú.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \dfrac{|x-2|}{e^x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Si es posible, halla la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+2}{e^x} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x-2}{e^x} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

Derivamos la función por intervalos:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{e^x} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{-x+3}{e^x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$x = 0,\ f(0) = 2,\ f'(0) = -3 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 2 - 3x$.

b) Estudiamos la derivabilidad en $x = 2$:

- En primer lugar, observamos que la función es continua en $x = 2$, ya que:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 0$$

- Hallamos las derivadas laterales:

$$f'(2^-) = \frac{-1}{e^2} \qquad f'(2^+) = \frac{1}{e^2}$$

Al ser distintas, la función no es derivable en $x = 2$ y no es posible hallar la recta tangente en este valor.

2. Tangente que pasa por un punto exterior

Hazlo tú. **Halla los puntos de la curva $f(x) = x^2 - 2x + 4$ en los que la recta tangente a ella pasa por el origen de coordenadas.**

Los puntos de tangencia están en la curva y son de la forma $(a, a^2 - 2a + 4)$.

La pendiente de la recta que pasa por el punto de tangencia y por el origen de coordenadas es $\dfrac{a^2 - 2a + 4 - 0}{a - 0}$.

Por otro lado, la pendiente de la recta tangente será $f'(a) = 2a - 2$.

Por tanto, $\dfrac{a^2 - 2a + 4}{a} = 2a - 2 \to a^2 - 2a + 4 = 2a^2 - 2a \to a = -2,\ a = 2.$

Hay dos puntos de tangencia que corresponden a dos rectas tangentes:

$$x = -2,\ f(-2) = 12,\ f'(-2) = -6 \to y = 12 - 6(x + 2)$$

$$x = 2,\ f(2) = 4,\ f'(2) = 2 \to y = 4 + 2(x + 2)$$

3. Coeficientes de una función

Hazlo tú. Halla los coeficientes de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ sabiendo que la tangente a la curva en el punto (1, 0) es $y = -3x + 3$, y que ese punto es un punto de inflexión.

Como la función pasa por el punto (1, 0), se cumple que $f(1) = 0$.

La pendiente de la recta tangente en este punto es –3, es decir, $f'(1) = -3$.

Como el punto de abscisa $x = 1$ es un punto de inflexión, entonces $f''(1) = 0$.

Por otro lado,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Sustituyendo obtenemos:

$$f(1) = 0 \to a + b + c = 0$$

$$f'(1) = -3 \to 3a + 2b = -3$$

$$f''(1) = 0 \to 6a + 2b = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b = -3 \\ 6a + 2b = 0 \end{array}\right\} \to a = 1,\ b = -3,\ c = 2$$

Página 183

4. Intervalos de crecimiento

Hazlo tú. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

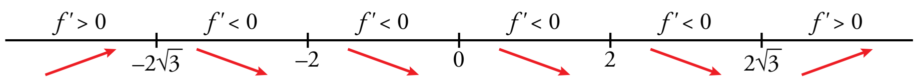
a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ **b)** $f(x) = ln(x^2 + 4x - 5)$

a) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \to x^4 - 12x^2 = 0 \to x = 2\sqrt{3},\ x = -2\sqrt{3},\ x = 0$$

Como el denominador es un cuadrado, el signo de $f'(x)$ depende solo del signo del numerador.



Es creciente en $(-\infty, -2\sqrt{3})$ y $(2\sqrt{3}, +\infty)$.

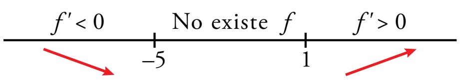
Es decreciente en $(-2\sqrt{3}, -2)$; $(-2, 0)$; $(0, 2)$ y $(2, 2\sqrt{3})$.

b) El dominio de definición es $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 5}$$

$f'(x) = 0 \to 2x + 4 = 0 \to x = -2$ (que no pertenece al dominio)

No tiene puntos singulares.



Es creciente en el intervalo $(1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, -5)$.

6. Máximos y mínimos

Hazlo tú. Halla los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

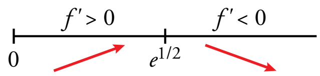
a) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}}$

b) $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 e^x}$

a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x - 2x \ln x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$

$f'(x) = 0 \to 1 - 2\ln x = 0 \to x = e^{1/2}$

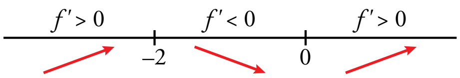
Estudiamos el crecimiento. Para ello, debemos tener en cuenta que el dominio de la función es $(0, +\infty)$.



$x = e^{1/2},\ f(e^{1/2}) = \dfrac{1}{2e} \to$ El punto $\left(e^{1/2}, \dfrac{1}{2e}\right)$ es un máximo.

b) $f'(x) = 6xe^x + 3x^2 e^x = 3xe^x (2 + x)$

$f'(x) = 0 \to 3xe^x (2 + x) = 0 \to x = -2,\ x = 0$



$x = -2,\ f(-2) = 12e^{-2} \to$ El punto $(-2, 12e^{-2})$ es un máximo.

$x = 0,\ f(0) = 0 \to$ El punto $(0, 0)$ es un mínimo.

7. Puntos de inflexión

Hazlo tú.

a) Halla los puntos de inflexión de la función $\boldsymbol{f(x) = x - 2\cos x,\ x \in [-\pi, \pi]}$**.**

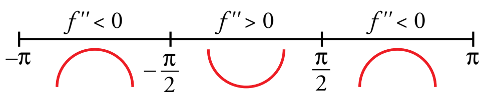
b) ¿Tiene $\boldsymbol{f}$ **máximo o mínimo en ese intervalo?**

a) $f'(x) = 1 + 2\operatorname{sen} x$

$f''(x) = 2\cos x$

$f''(x) = 0 \to 2\cos x = 0 \to x = -\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{2}$

Estudiamos el signo de la derivada segunda.



$x = -\dfrac{\pi}{2},\ f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - 2\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{2},\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Los puntos de inflexión son $\left(-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 1 + 2sen\,x = 0 \;\rightarrow\; sen\,x = -\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x = -\dfrac{\pi}{6}$

Para averiguar si en el punto de abscisa $x = -\dfrac{\pi}{6}$ hay un máximo o un mínimo, evaluamos la segunda derivada:

$$f''\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} > 0$$

$$x = -\frac{\pi}{6},\; f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$

El punto $\left(-\dfrac{\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$ es un mínimo.

Página 185

8. Máximo absoluto

Hazlo tú. Se estima que el beneficio de una empresa viene dado por la función

$$\boldsymbol{B(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & \text{si } 0 \le t \le 6 \\ 2t & \text{si } 6 \le t \le 10 \end{cases}}$$

¿En qué momento se obtiene el beneficio máximo en los primeros 6 años y cuál es su valor? ¿Es relativo o absoluto ese beneficio?

Para obtener el beneficio máximo en el intervalo [0, 6], estudiamos la existencia de extremos relativos y evaluamos tanto en ellos como en los extremos del intervalo.

$$B'(t) = \begin{cases} 8 - 2t & \text{si } 0 < t < 6 \\ 2 & \text{si } 6 < t < 10 \end{cases} \;\rightarrow\; 8 - 2t = 0 \;\rightarrow\; t = 4$$

$$B(0) = 0,\; B(4) = 16,\; B(6) = 12$$

El beneficio máximo en los seis primeros años lo alcanza en el cuarto año y su valor es 16.

Observamos que la función vuelve a crecer a partir del sexto año, ya que, por ejemplo, el beneficio en el décimo año es $B(10) = 20$. Por tanto, el beneficio en el cuarto año representa un máximo relativo.

9. Inversión publicitaria

Hazlo tú. Halla dos números naturales cuya suma sea 15 y tales que el producto de uno por el cuadrado del otro sea el mayor posible.

Sean x e y los números naturales buscados. Cumplen que $x + y = 15$.

Por otro lado, $P = x^2y$ es la función que queremos optimizar. Sustituyendo $y = 15 - x$, obtenemos:

$$P = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$$

$$P'(x) = 30x - 3x^2$$

$$P'(x) = 0 \;\rightarrow\; 30x - 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; 3x(10 - x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \text{ (no válido)},\; x = 10$$

Ahora usamos la derivada segunda para saber si es máximo o mínimo:

$$P''(x) = 30 - 6x \;\rightarrow\; P''(10) = -30 < 0 \;\rightarrow\; \text{Hay un máximo en } x = 10.$$

Los números son $x = 10$, $y = 5$.

10. Área máxima

Hazlo tú. Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total 54 cm^2. Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.

Llamemos r al radio del cilindro y h a la altura.

El área total es $S = 2\pi r^2 + 2\pi r\text{h}$.

$$2\pi r^2 + 2\pi r\text{h} = 54 \rightarrow \text{h} = \frac{27 - \pi r^2}{\pi r}$$

El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 \text{h} = \pi r^2 \frac{27 - \pi r^2}{\pi r} = r(27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$.

Buscamos las dimensiones del cilindro de volumen máximo.

$$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$$

$$V'(r) = 0 \rightarrow 27 - 3\pi r^2 = 0 \rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ cm}$$

$$V''(r) = -6\pi r$$

$$V''(r) < 0 \rightarrow \text{En } r = \left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) \text{ hay un máximo relativo.}$$

Solo falta calcular la altura del cilindro, que es $\text{h} = \frac{27 - \pi \cdot 9/\pi}{\pi \cdot 3/\sqrt{\pi}} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$ cm.

11. Problema de tiempo mínimo

Hazlo tú. La vela mayor de un barco tiene forma de triángulo rectángulo. Si la hipotenusa debe medir 6 m, calcula sus dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

Llamemos x, y a las medidas de los catetos del triángulo rectángulo.

$$x^2 + y^2 = 36 \rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

La superficie de la vela es $S = \frac{xy}{2}$ ya que los catetos hacen de base y de altura del triángulo rectángulo.

Se obtiene:

$$S(x) = \frac{x\sqrt{36 - x^2}}{2}$$

$$S'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{36 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{36 - x^2}}\right) = \frac{18 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \rightarrow 18 - x^2 = 0 \rightarrow x = 3\sqrt{2},\ x = -3\sqrt{2} \text{ (no vale)}$$

El valor $x = 3\sqrt{2}$ es un máximo como se puede comprobar estudiando el signo de f' a ambos lados del mismo.

El otro cateto del triángulo mide $y = \sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$.

La vela es un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden $3\sqrt{2}$ m.

Ejercicios y problemas guiados

Página 187

1. Tangente perpendicular a una recta

Escribir las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 2 = 0$.

La recta $y = -x + 2$ tiene pendiente -1. Cualquier recta perpendicular a ella tendrá pendiente $-\frac{1}{-1} = 1$. Por tanto, debemos calcular los puntos de la curva en los que la pendiente vale 1.

$$f'(x) = 12x^2 - 2$$

$$f'(x) = 1 \to 12x^2 - 2 = 1 \to x = -\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2},\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{2} \to y = \frac{3}{2} + 1\left(x + \frac{1}{2}\right) \to y = x + 2$$

$$x = \frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} \to y = \frac{1}{2} + 1\left(x - \frac{1}{2}\right) \to y = x$$

2. Intervalos de concavidad y convexidad

Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

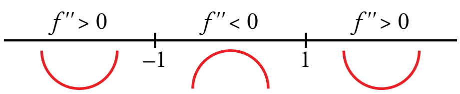
El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

$f''(x) = 0 \to 3x^2 + 1 = 0$ no tiene solución $\to$ No tiene puntos de inflexión y la tabla de los signos de la segunda derivada es:



(el signo de la segunda derivada solo depende del denominador)

La función es cóncava en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$. Es convexa en $(-1, 1)$.

3. Máximo y mínimo absoluto

Calcular el máximo y el mínimo absolutos, en el intervalo [–1, 2] de la función:

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x$$

$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - x$ está definida en $\mathbb{R}$ ya que el argumento del logaritmo siempre es positivo. Es una función continua y derivable en $[-1, 2]$. Por ser continua en un intervalo cerrado y acotado, alcanza sus extremos absolutos. Estos pueden ser los extremos del intervalo o los extremos relativos si están en el interior.

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - 1$$

$$f'(x) = 0 \to \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} = 1 \to 2x + 1 = x^2 + x + 1 \to x = 1,\ x = 0$$

Evaluamos:

$x = -1 \rightarrow f(-1) = ln\left((-1)^2 + (-1) + 1\right) - (-1) = 1$

$x = 0 \rightarrow f(0) = ln\ 1 = 0$

$x = 1 \rightarrow f(1) = ln\ 3 - 1 \approx 0{,}0986$

$x = 2 \rightarrow f(2) = ln\ 7 - 2 \approx -0{,}054$

Alcanza el máximo absoluto en $(1, 1)$ y el mínimo absoluto en $(2, ln\ 7 - 2)$.

4. Puntos en los que se anulan f', f'' y f'''

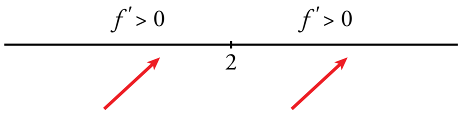
Dada la función $f(x) = 1 - (2 - x)^5$, estudiar si tiene máximo, mínimo o punto de inflexión en $x = 2$.

- Hallamos f', f'', f''':

  $$f'(x) = 5\,(2 - x)^4 \rightarrow f''(x) = -20\,(2 - x)^3 \rightarrow f'''(x) = 60\,(2 - x)^2$$

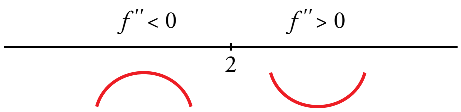
  Al hacer $x = 2$, se verifica $f'(2) = f''(2) = f'''(2) = 0$.

- Estudiamos el signo de f' a la izquierda y a la derecha de $x = 2$:



  f crece a la izquierda y a la derecha de 2 $\rightarrow$ f no tiene máximo ni mínimo en $x = 2$.

- Comprobamos que tiene un punto de inflexión estudiando el signo de f'':



  A la izquierda de $x = 2$, la función es convexa, y a la derecha de $x = 2$, la función es cóncava.

El punto $(2, 1)$ es un punto de inflexión.

5. Extremos relativos

Sea $f(x) = x^2\,e^{-ax}$ con $a \neq 0$.

a) Calcular el valor de a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

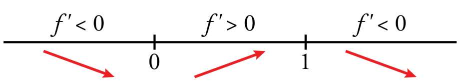
b) Clasificar los extremos relativos cuando $a = 2$.

a) $f'(x) = 2xe^{-ax} - ax^2e^{-ax}$

$f'(2) = 0 \rightarrow 4e^{-2a} - 4ae^{-2a} = 0 \rightarrow e^{-2a}(4 - 4a) = 0 \rightarrow 4 - 4a = 0 \rightarrow a = 1$ (ya que la exponencial nunca se anula)

b) Para $a = 2$ la derivada es $f'(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x}$.

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 2x = 0 \rightarrow x = 1,\ x = 0$



$x = 0,\ f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ es un mínimo relativo.

$x = 1,\ f(1) = e^{-2} \rightarrow (1, e^{-2})$ es un máximo relativo.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 188

Para practicar

Recta tangente

1 Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ **en** $x = 0$

b) $y = (0{,}3x - 0{,}01x^2)^2$ **en** $x = 10$

c) $y = \sqrt{x+12}$ **en** $x = -3$

d) $y = e^{2x-1}$ **en** $x = \dfrac{1}{2}$

e) $y = x\, ln\, x$ **en** $x = e$

a) $f'(x) = -\dfrac{4}{(x-2)^2}$, $f'(0) = -1$

$x = 0$, $f(0) = -1$

La recta tangente es $y = -1 - x$.

b) $f'(x) = 2(0{,}3x - 0{,}01x^2)(0{,}3 - 0{,}02x)$, $f'(10) = 0{,}4$

$x = 10$, $f(10) = 4$

La recta tangente es $y = 4 + 0{,}4(x - 10)$.

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+12}}$, $f'(-3) = \dfrac{1}{6}$

$x = -3$, $f(-3) = 3$

La recta tangente es $y = 3 + \dfrac{1}{6}(x+3)$

d) $f'(x) = 2e^{2x-1}$, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$

$x = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$

La recta tangente es $y = 1 + 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$.

e) $f'(x) = ln\, x + 1$, $f'(e) = 2$

$x = e$, $f(e) = e$

La recta tangente es $y = e + 2(x - e)$.

2 Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:

a) $y = x\, ln\, x$ **b)** $y = x^2 e^x$ **c)** $y = sen\, 2x$

Una recta paralela al eje de abscisas tiene pendiente cero.

a) $y' = ln\, x + x \cdot \dfrac{1}{x} = ln\, x + 1$

$y' = 0 \rightarrow ln\, x + 1 = 0 \rightarrow ln\, x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \rightarrow y = \dfrac{-1}{e}$

La recta tangente en el punto $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{-1}{e}\right)$ es: $y = \dfrac{-1}{e}$

b) $y' = 2x\,e^x + x^2\,e^x = (2x + x^2)e^x$

Como $e^x \neq 0$ para todo x:

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2x + x^2 = 0 \;\rightarrow\; x(2+x) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = -2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (-2, 4/e^2) \end{cases}$$

- En el punto (0, 0), la recta tangente es: $y = 0$
- En el punto $\left(-2, \dfrac{4}{e^2}\right)$, la recta tangente es: $y = \dfrac{4}{e^2}$

c) $y' = 2\cos 2x$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2\cos 2x = 0 \;\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \;\rightarrow\; y = 1 \\ 2x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k \;\rightarrow\; y = -1 \end{cases}$$

- En los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k, 1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = 1$
- En los puntos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + \pi k, -1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = -1$

3 **Dada la función $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$, halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente sea $\dfrac{5}{4}$.**

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{4} \;\rightarrow\; \frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{5}{4} \;\rightarrow\; x^2 = 4 \;\rightarrow\; x = -2,\; x = 2$$

Los puntos pedidos son $\left(-2, \dfrac{-3}{2}\right)$ y $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$.

4 **Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $y = \dfrac{x - 4}{x + 2}$ que son paralelas a la recta $6x - y + 5 = 0$.**

La recta dada es $y = 6x + 5$. Por tanto, tenemos que hallar los puntos de la función dada en los que las pendientes de las rectas tangentes valen 6.

$$f'(x) = \frac{x + 2 - (x - 4)}{(x + 2)^2} = \frac{6}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = 6 \;\rightarrow\; \frac{6}{(x + 2)^2} = 6 \;\rightarrow\; (x + 2)^2 = 1 \;\rightarrow\; x = -3,\; x = -1$$

$x = -3$, $f(-3) = 7 \;\rightarrow\;$ La tangente en $(-3, 7)$ es $y = 7 + 6(x + 3)$.

$x = -1$, $f(-1) = -5 \;\rightarrow\;$ La tangente en $(-1, -5)$ es $y = -5 + 6(x + 1)$.

5 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x|x - 3|$ cuya pendiente es -2.**

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} x(-x + 3) & \text{si } x < 3 \\ x(x - 3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 3x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Hallamos la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La función dada es continua en todo $\mathbb{R}$ y es derivable cuando $x \neq 3$.

Para que la pendiente de la recta tangente a la curva sea –2 pueden darse dos casos:

$$-2x + 3 = -2 \;\rightarrow\; x = \frac{5}{2} \;\rightarrow\; f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

$$2x - 3 = -2 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2} \quad \text{(no válido porque no pertenece al intervalo)}$$

El punto en el que la tangente tiene pendiente –2 es $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ y la recta tangente en dicho punto es:

$$y = \frac{5}{4} - 2\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

6 **a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ en $x = 3$.**

b) ¿Existe otra recta tangente a la gráfica de f que sea paralela a la que has hallado? En caso afirmativo, hállala.

a) Hallamos la pendiente de la recta tangente usando la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$x = 3,\; f(3) = 8,\; f'(3) = 11 \;\rightarrow\; y = 8 + 11(x - 3)$$

b) Para saber si existe otro punto en el que la recta tangente sea paralela resolvemos:

$$f'(x) = 11 \;\rightarrow\; 3x^2 - 6x + 2 = 11 \;\rightarrow\; x = 3,\; x = -1$$

Hay otro punto:

$x = -1,\; f(-1) = -4 \;\rightarrow\; y = -4 + 11(x + 1)$ es la recta tangente en este punto.

7 **Halla la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.**

Calculamos primero el punto de inflexión resolviendo $f''(x) = 0$:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 24x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{6}$$

Evaluando la derivada segunda a ambos lados de $x = \frac{1}{6}$ observamos que la función pasa de convexa a cóncava. Luego es un punto de inflexión.

$$x = \frac{1}{6},\; f\left(\frac{1}{6}\right) = 4\left(\frac{1}{6}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 10 = -\frac{271}{27},\; f'\left(\frac{1}{6}\right) = 12\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

La ecuación es: $y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$

8 **Halla los puntos de la curva $y = 3x^2 - 5x + 12$ en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas.**

Debemos hallar las ecuaciones de las tangentes desde un punto exterior a la gráfica de la función.

Los puntos de tangencia son de la forma $(a, 3a^2 - 5a + 12)$.

La pendiente de la recta tangente que pasa por el origen es $\frac{3a^2 - 5a + 12 - 0}{a - 0} = \frac{3a^2 - 5a + 12}{a}$.

Usando la derivada, la pendiente anterior también es $6a - 5$.

$$\frac{3a^2 - 5a + 12}{a} = 6a - 5 \;\rightarrow\; 3a^2 - 5a + 12 = 6a^2 - 5a \;\rightarrow\; a -2,\; a = 2$$

Obtenemos dos puntos de tangencia y dos rectas tangentes:

$$x = -2,\; f(-2) = 34,\; f'(-2) = -17 \;\rightarrow\; y = -17x$$

$$x = 2,\; f(2) = 14,\; f'(2) = 7 \;\rightarrow\; y = 7x$$

9 **Halla los puntos de la curva $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$ en los que la recta tangente a esta pase por el punto (0, –8). Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.**

Debemos hallar las ecuaciones de las tangentes desde un punto exterior a la gráfica de la función.

Los puntos de tangencia son de la forma $\left(a, \frac{a^2}{4} + 4a - 4\right)$.

La pendiente de la recta tangente que pasa por $(0, -8)$ es $\dfrac{\frac{a^2}{4} + 4a - 4 - (-8)}{a - 0} = \dfrac{\frac{a^2}{4} + 4a + 4}{a}$.

Usando la derivada, la pendiente anterior también es $\frac{a}{2} + 4$.

$$\frac{\frac{a^2}{4} + 4a + 4}{a} = \frac{a}{2} + 4 \to \frac{a^2}{4} + 4a + 4 = \frac{a^2}{4} + 4a \to a = -4,\ a = 4$$

Obtenemos dos rectas tangentes:

$$f'(-4) = 2 \to y = -8 + 2x$$

$$f'(4) = 6 \to y = -8 + 6x$$

10 **Halla, en cada caso, las ecuaciones de las rectas tangentes paralelas al eje X:**

a) $y = \dfrac{x^3}{3(x-1)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 + 2x}{e^x}$

a) El eje horizontal tiene pendiente 0.

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{3(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \to x^2(2x-3) = 0 \to x = 0,\ x = \frac{3}{2}$$

$$x = 0,\ f(0) = 0 \to y = 0$$

$$x = \frac{3}{2},\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{9}{4} \to y = \frac{9}{4}$$

b) $y' = \dfrac{2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{x(2 \ln x + 1)}{\ln^2 x}$

$$y' = 0 \to x(2 \ln x + 1) = 0 \to x = 0 \text{ (no vale)},\ x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}},\ f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{e} \to y = -\frac{2}{e}$$

c) $y' = \dfrac{(2x+2)e^x - (x^2+2x)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{2 - x^2}{e^{2x}}$

$$y' = 0 \to 2 - x^2 = 0 \to x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2},\ f(\sqrt{2}) = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} \to y = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$$

$$x = -\sqrt{2},\ f(-\sqrt{2}) = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}} \to y = e^{\sqrt{2}}(2 - 2\sqrt{2})$$

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

11 **Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

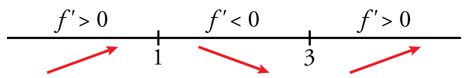
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **f)** $y = e^x(x-1)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = 4 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



Hay un mínimo en (3, 0) y un máximo en (1, 4).

Puntos de inflexión:

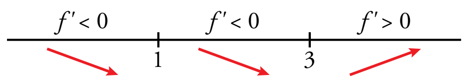
$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\; y = 2$$

Como $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y $f''(x) > 0$ para $x > 2$, el punto (2, 2) es un punto de inflexión.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

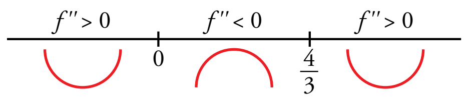
$$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 2 \;\rightarrow\; y = -4/3 \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

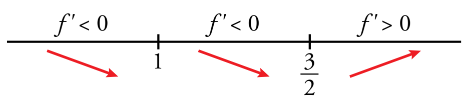
$$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 4/3 \;\rightarrow\; y = -(64/81) \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en (0, 0) y otro en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

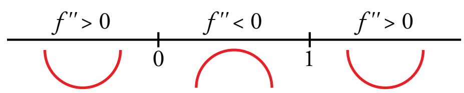
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(4x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 3/2 \;\rightarrow\; y = -27/16 \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

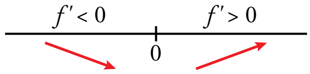
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = -1 \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en (0, 0) y otro en (1, –1).

d) $f'(x) = 4x^3 + 4x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x(x^2 + 1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0$



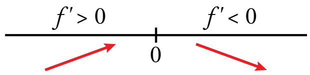
Hay un mínimo en (0, 0).

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

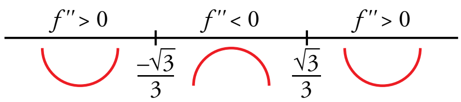
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$



Hay un máximo en (0, 1).

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$$

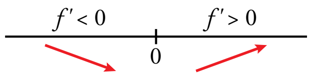
$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{3}{4}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x - 1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

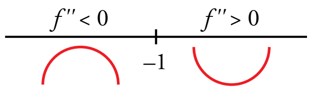
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x) $\rightarrow\; y = 1$



Hay un mínimo en (0, –1).

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \dfrac{-2}{e}$



Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \dfrac{-2}{e}\right)$.

12 **Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x-2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

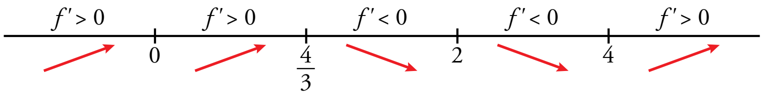
d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ **e)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}$

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x-2)} = \dfrac{8 - 3x}{x^2 - 2x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

$$f'(x) = \frac{-3(x^2 - 2x) - (8 - 3x) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x - 16x + 16 + 6x^2 - 6x}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-3x^2 + 16x + 16}{(x^2 - 2x)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 16x + 16 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{16 \pm \sqrt{256-192}}{6} = \dfrac{16 \pm \sqrt{64}}{6} = \dfrac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$

Signo de la derivada:



La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$.

Es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, -2\right) \cup (2, 4)$.

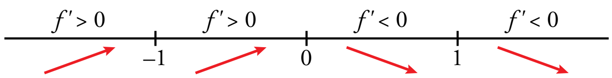
Tiene un máximo en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$, y un mínimo en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$.

b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de la derivada:



La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

Es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

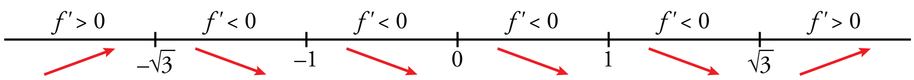
Tiene un máximo en $(0, -1)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x\ \sqrt{3} \end{cases}$

Signo de la derivada:



La función es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

Tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

d) $y = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(2-x)-(2x^2-3x)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{8x-4x^2-6+3x+2x^2-3x}{(2-x)^2} = \frac{-2x^2+8x-6}{(2-x)^2} = \frac{-2(x^2-4x+3)}{(2-x)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\to\; x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de la derivada:

$f' < 0$	1	$f' > 0$	2	$f' > 0$	3	$f' < 0$
↘		↗		↗		↘

La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$.

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(1, -1)$.

tiene un máximo en $(3, -9)$.

e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \dfrac{2xx - (x^2 - 1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{x^2 - 1}{x} = 0$. No tiene solución.

Signo de la derivada:

$f' > 0$	0	$f' > 0$
↗		↗

La función es creciente en todo su dominio.

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 3\}$

$f'(x) = \dfrac{-8\,(3x^2 - 6x)}{x^4\,(x - 3x)^2} = \dfrac{-8x(3x-6)}{x^4\,(x-3x)^2} = \dfrac{-8\,(3x-6)}{x^3\,(x-3x)^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; 3x - 6 = 0 \;\to\; x = 2$

Signo de la derivada:

$f' < 0$	0	$f' > 0$	2	$f' < 0$	3	$f' < 0$
↘		↗		↘		↘

La función: es creciente en $(0, 2)$.

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

tiene un máximo en $(2, -2)$.

13 **Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x-2)^4$

d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2-x}{x+1}$ **f)** $y = ln\,(x+1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\to\; 6x = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:

$f'' < 0$	0	$f'' > 0$
∩		∪

La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

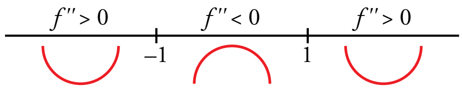
Tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$.

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



La función es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y convexa en $(-1, 1)$.

Tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$.

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 2$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

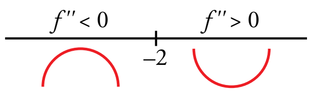
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\, e^x$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\, e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -2$ ($e^x \neq 0$ pata todo x)

Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, -2)$ y cóncava en $(-2, +\infty)$.

Tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$.

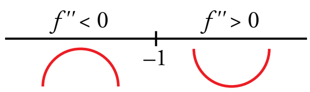
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1\,(x + 1) - (2 - x)}{(x + 1)^2} = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x + 1)^2} = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x + 1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, +\infty)$.

No tiene puntos de inflexión.

f) $y = ln\,(x + 1)$. *Dominio* $= (-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2}$$

$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

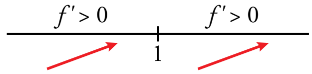
14 **Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x - 1)^3$ **b)** $y = 2 + (x - 1)^4$ **c)** $y = 3 - (x - 1)^6$ **d)** $y = -3 + 2(x - 1)^5$

a) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 3(x - 1)^2 \rightarrow 3(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 1$

Estudiamos el signo de la derivada:



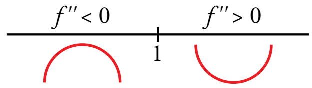
La función crece a la izquierda y a la derecha de $x = 1$.

No hay ni un máximo ni un mínimo.

• Puntos de inflexión: buscamos los puntos en los que $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 6(x - 1) \rightarrow 6(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 1$

Estudiamos el signo de $f''(x)$:



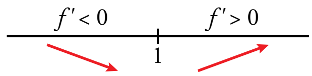
Es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en $(1, 1)$.

b) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 4(x - 1)^3 \rightarrow 4(x - 1)^3 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 2$

Estudiamos el signo de la derivada:



La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a su derecha.

Hay un mínimo en $(1, 2)$.

• Podemos comprobar que no hay puntos de inflexión con el signo de $f''(x)$:

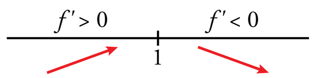
$f''(x) = 12(x - 1)^2 \rightarrow f''(x) \geq 0$ para cualquier x.

La función es cóncava en todo su dominio.

c) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = -6(x - 1)^5 \rightarrow -6(x - 1)^5 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 3$

Estudiamos el signo de la derivada:



La función crece a la izquierda de $x = 1$ y decrece a su derecha.

Hay un máximo en $(1, 3)$.

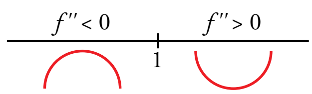
• Como $f''(x) = -30(x - 1)^4 \leq 0$, la función es convexa en todo su dominio.

d) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 10(x - 1)^4 \rightarrow 10(x - 1)^4 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = -3$

Como $f'(x) = 10(x - 1)^4 \geq 0$, la función es creciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos.

Estudiamos el signo de $f''(x) = 40(x - 1)^3$:



La función es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en $(1, -3)$.

Coeficientes de una función

15 **Dada la función $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$, calcula a sabiendo que $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$. ¿Se trata de un máximo o un mínimo?**

Como tiene un extremo relativo en $x = 3$ debe cumplirse que $f'(3) = 0$.

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{12}{x^3}$$

$$f'(3) = 0 \to -\frac{a}{9} - \frac{12}{27} = 0 \to a = -4$$

Por tanto, $f(x) = 1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^3};\ f''(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{36}{x^4}$$

$x = 3$, $f(3) = \frac{1}{3}$, $f''(3) = -\frac{8}{27} + \frac{36}{81} = \frac{4}{27} > 0 \to$ El punto $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ es un mínimo relativo.

16 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por $(1, 1)$ y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$. Halla a y b.**

$f(x) = ax^3 + bx$; $f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \to a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \to 3a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

17 **Halla una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1, 2)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f(1) = 2 \to 1 + a + b + c = 2$

$f''(1) = 0 \to 6 + 2a = 0$

$f'(2) = 0 \to 12 + 4a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + a + b + c = 2 \\ 6 + 2a = 0 \\ 12 + 4a + b = 0 \end{array}\right\} \to a = -7,\ b = 16,\ c = -8$$

18 **Calcula los coeficientes a, b y c de la función$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, sabiendo que:**

a) La ecuación de la recta tangente a f en $x = 0$ es $y = x$.

b) Tiene un extremo relativo en el punto $(-1, 0)$.

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

Del apartado a) se deduce que pasa por el punto $(0, 0)$ y que $f'(0) = 1$.

El apartado b) implica que $f(-1) = 0$ y que $f'(-1) = 0$.

$f'(0) = 1 \to c = 1$

$f(-1) = 0 \to 1 - a + b - 1 = 0 \to -a + b = 0$

$f'(-1) = 0 \to -4 + 3a - 2b + 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -a + b = 0 \\ -4 + 3a - 2b + 1 = 0 \end{array}\right\} \to a = 3,\ b = 3$$

19 **Halla a, b, c y d para que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en el punto (0, 4) y un mínimo relativo en el punto (2, 0).**

Las condiciones del problema implican que:

$f(0) = 4,\ f'(0) = 0,\ f(2) = 0,\ f'(2) = 0$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$d = 4$

$c = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 8a + 4b + 4 = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{array}\right\} \to a = 1,\ b = -3$$

20 **Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$. Halla a, b, c y d.**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{lcr} f(1) = 0 & \to & a + b + c + d = 0 \\ f'(0) = 2 & \to & c = 2 \\ f'(1) = 0 & \to & 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 & \to & 12a + 4b + c = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a + b + d = -2 \\ c = 2 \\ 3a + 2b = -2 \\ 6a + 2b = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{-3}{2} \\ c = 2 \\ d = \dfrac{-5}{6} \end{array}$$

Así: $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - \dfrac{5}{6}d;\ f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$

21 **Dada la función $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = 1/2$.**

$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$

$$\left.\begin{array}{lcr} f''(1) = 0 & \to & 12a + 18b - 6 = 0 \\ f''(1/2) = 0 & \to & 3a + 9b - 6 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2a + 3b - 1 = 0 \\ a + 3b - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Restando las igualdades: $a + 1 = 0 \to a = -1$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación: $3b - 3 = 0 \to b = 1$

22 **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en el punto (2, 1). Calcula a, b y c.**

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(-1) = 0 & \to & -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 & \to & 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 & \to & 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}$$

23 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1 \;\to\; 1+a+b+c=1 \\ f'(1)=0 \;\to\; 3+2a+b=0 \\ f''(1)=0 \;\to\; 6+2a=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a=-3 \\ b=3 \\ c=0 \end{array}\right\} \to f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

24 **Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.**

Si la curva tiene un punto de inflexión en $x = 1$, debe ser $f''(1) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \to f''(x) = 6x + 2a \to f''(1) = 6 \cdot 1 + 2a \to 6 + 2a = 0$

Si en $x = 1$ la tangente es horizontal, su pendiente será 0; y, por tanto, $f'(1) = 0$.

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 3 + 2a + b = 0$

Resolvemos: $\begin{cases} 6+2a=0 \to a=-3 \\ 3+2a+b=0 \to b=-3-2(-3)=3 \end{cases}$

La curva será $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$.

Para resolver

25 **Dadas las funciones:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x \le 1 \\ 4x-2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2+7x-4 & \text{si } x < 2 \\ 2x^2+3x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

a) Comprueba que son derivables en $\mathbb{R}$.

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

Ambas funciones son continuas y derivables salvo quizás en los puntos donde se separan los trozos porque están definidas por intervalos mediante funciones polinómicas.

a) Estudiamos el punto $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2+2x-1) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (4x-2) = 2 \end{cases} \to \lim_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1) \to \text{Es continua también en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \to f'(1^-) = 4 = f'(1^+) \to \text{Es derivable en } x = 1.$$

Estudiamos el punto $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2+7x-4) = 14 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} (2x^2+3x) = 14 \end{cases} \to \lim_{x\to 2} g(x) = 14 = g(2) \to \text{Es continua también en } x = 2.$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x+7 & \text{si } x < 2 \\ 4x+3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \to f'(2^-) = 11 = f'(2^+) \to \text{Es derivable en } x = 2.$$

b) En el caso de $f(x)$:

$f'(x) = 0 \to 2x + 2 = 0 \to x = -1$ (pertenece al intervalo de definición)

$x = -1$, $y = -2$, $f''(-1) > 0 \to$ El punto $(-1, -2)$ es un mínimo relativo.

En el caso de $g(x)$:

$$g'(x) = 0 \;\to\; \begin{cases} 2x+7=0 \;\to\; x=-\dfrac{7}{2} \text{ (pertenece al intervalo de definición)} \\ 4x+3=0 \;\to\; x=-\dfrac{3}{4} \text{ (no vale porque no está en el intervalo de definición)} \end{cases}$$

$x = -\dfrac{7}{2},\; y = -\dfrac{65}{4},\; g''\left(-\dfrac{7}{2}\right) > 0 \;\to$ El punto $\left(-\dfrac{7}{2}, -\dfrac{65}{4}\right)$ es un mínimo relativo.

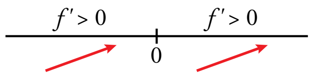
26 **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x|x|$. ¿Tiene máximos o mínimos?**

Determina los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?

$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \;\to$ Es una función continua en $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases},\; f'(0^-) = 0 = f'(0^+) \;\to$ También es derivable en $x = 0$.

La primera derivada solo se anula cuando $x = 0$.



La función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \;\to$ Es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

El punto $(0, 0)$ es un punto de inflexión porque cambia de convexa a cóncava.

27 **Halla el valor de c de modo que la función $y = \dfrac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único punto crítico.**

¿Se trata de un máximo, de un mínimo o de un punto de inflexión?

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+c) - e^x \cdot 2x}{(x^2+c)^2} = \frac{e^x(x^2+c-2x)}{(x^2+c)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x^2 - 2x + c = 0 \;\to\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4c}}{2}$$

Para que solo haya un extremo relativo, ha de ser: $4 - 4c = 0 \;\to\; c = 1$

En este caso sería:

$y = \dfrac{e^x}{x^2+1};\; f'(x) = \dfrac{e^x(x+1)^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; x = 1$

$f'(x) = 0$ si $x \ne 1 \;\to\; f(x)$ es creciente si $x \ne 1$.

Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

28 **a) Calcula los valores de los parámetros a y b para que sea derivable la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

b) Halla sus extremos relativos en el caso $a = -2,\; b = 1$.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones continuas y derivables. Solo nos queda estudiar el punto $x = 0$. Veamos la continuidad de la función:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} \dfrac{1-x}{e^x} = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} (x^2 + ax + b) = b \end{cases} \to \; b = 1$$

Para el valor obtenido de b la función es continua porque $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} & \text{si } x < 0 \to f'(0^-) = -2 \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \to f'(0^+) = a \end{cases} \to \; a = -2 \text{ para que sea derivable en } x = 0.$$

Si $a = -2$ y $b = 1$ la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} = 0 \to x = 2 \text{ (no vale)} \\ 2x - 2 = 0 \to x = 1 \end{cases}$$

Estudiando el signo de la primera derivada en las proximidades de $x = 1$, obtenemos que el punto (1, 0) es un mínimo relativo.

29 **La curva $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ corta al eje de abscisas en $x = 1$ y tiene un punto de inflexión en (3, 2).**

Calcula los puntos de la curva que tengan recta tangente paralela al eje X.

$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$; $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$; $f''(x) = 6x + 2\alpha$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 0 & \to & 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ f(3) = 2 & \to & 27 + 9\alpha + 3\beta + \gamma = 2 \\ f''(3) = 0 & \to & 18 + 2\alpha = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \alpha = -9 \\ \beta = 24 \\ \gamma = -16 \end{array}\right\}$$

Así: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$; $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

- Puntos con tangente horizontal:

$$f'(x) = 0 \;\to\; x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

- Los puntos son (4, 0) y (2, 4).

30 **Halla el valor que debe tener a para que la función $f(x) = x^2 \, ln \, \dfrac{x}{a}$, $a > 0$, tenga un punto singular en $x = e$.**

El dominio de definición es $(0, +\infty)$ por ser a positivo.

$$f'(x) = x + 2x \, ln \, \frac{x}{a}$$

Para que tenga un punto singular en $x = e$ debe ser $f'(e) = 0$

$$e + 2e \cdot ln \, \frac{e}{a} = 0 \to e\left(1 + 2 \, ln \, \frac{e}{a}\right) = 0 \to 1 + 2(ln \, e - ln \, a) = 0 \to 1 + 2 - 2 \, ln \, a = 0 \to ln \, a = \frac{3}{2}$$

$a = e^{3/2}$

31 **Comprueba si existe algún valor de a para el cual la función $f(x) = a\ln x + x^3$ tenga un punto de inflexión en $x = 1$.**

Para que exista punto de inflexión en $x = 1$, debe ser $f''(1) = 0$:

$$f(x) = a\ ln\, x + x^3 \to f'(x) = a \cdot \frac{1}{x} + 3x^2 = \frac{a}{x} + 3x^2$$

$$f''(x) = -\frac{a}{x^2} + 6x \to f''(1) = -a + 6 = 0 \to a = 6$$

Comprobamos con f''' si existe punto de inflexión:

$$f''(x) = -\frac{6}{x^2} + 6x \to f'''(x) = \frac{6}{x^3} + 6 \to f'''(1) \neq 0$$

Para $a = 6$, la función tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

32 **Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ x\ ln\, x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.**

Determina a, b y c para que sea continua, tenga un máximo en $x = -1$ y la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$.

La función está definida por intervalos mediante funciones continuas. Exigimos la continuidad en $x = 0$ y así será continua en $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to 0^-} (ax^2 + bx + c) = c$$

$$\lim_{x \to 0^+} (x\ ln\, x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{ln\, x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (indeterminado).}$$

Usando la regla de L'Hôpital $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$.

Luego $\lim\limits_{x \to 0^+} (x\ ln\, x) = 0$.

Por tanto, para que sea continua $c = 0$.

Si $x < 0$, $f'(x) = 2ax + b$

Por tener un máximo en $x = -1$, $f'(-1) = 0 \to -2a + b = 0 \to b = 2a$

Para que la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$, debe ser $f'(2) = 2 \to -4a + b = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} b = 2a \\ -4a + b = 2 \end{array}\right\} \to a = -1,\ b = -2$$

33 **a) Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } x \le 1 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

calcula los valores de m, n y p para que f sea derivable en $\mathbb{R}$ y tenga un extremo relativo en $x = -\frac{1}{2}$.

b) ¿Es un máximo o un mínimo?

c) Comprueba si existen otros puntos singulares y representa la función.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones polinómicas, luego es continua y derivable salvo, quizás, en el punto.

Estudiamos el punto $x = 1$.

Continuidad:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + px) = -1 + p \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + mx + n) = 1 + m + n \end{array}\right\} \to -1 + p = 1 + m + n \to m + n - p = -2$$

Si se cumple la condición anterior la función será continua en $x = 1$ porque $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + p & \text{si } x < 1 \\ 2x + m & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -2 + p \\ f'(1^+) = 2 + m \end{cases} \rightarrow -2 + p = 2 + m \rightarrow m - p = -4$$

Si se cumple la condición anterior la función será derivable en $x = 1$ al coincidir las derivadas laterales.

Para que tenga un extremo relativo en $x = -\frac{1}{2}$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow 1 + p = 0 \rightarrow p = -1$.

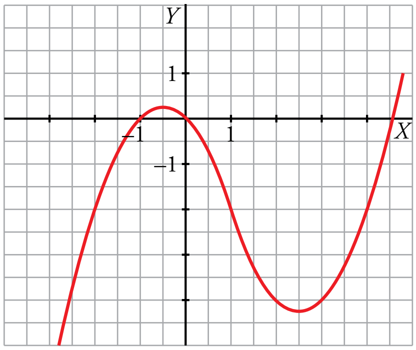
$$\left.\begin{array}{l} p = -1 \\ m - p = -4 \\ m + n - p = -2 \end{array}\right\} \rightarrow m = -5,\ n = 2,\ p = -1$$

b) $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 < 0 \rightarrow$ El extremo relativo es un máximo.

c) Si existe otro extremo relativo, debe estar en el segundo intervalo.

$$f'(x) = 0\ (x > 1) \rightarrow 2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$f''\left(\frac{5}{2}\right) = 2 > 0 \rightarrow \text{En } x = \frac{5}{2} \text{ hay un mínimo relativo.}$$



34 **Dada la función $f(x) = |x - 3|(x + 1)$, halla los puntos donde las tangentes son paralelas a la recta $y = 6x - 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3)(x+1) & \text{si } x < 3 \\ (x-3)(x+1) & \text{si } x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La función no es derivable en $x = 3$ porque las derivadas laterales son distintas.

$$f'(x) = 6 \rightarrow \begin{cases} -2x + 2 = 6 \rightarrow x = -2 \\ 2x - 2 = 6 \rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$x = -2,\ y = -5$

$x = 4,\ y = 5$

Los puntos buscados son $(-2, -5)$ y $(4, 5)$.

35 **Calcula el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo [–2, 3] de la función:**

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + (x - 3)$$

La función dada es continua en el intervalo $[-2, 3]$ luego alcanza su máximo y su mínimo absoluto. Estos pueden ser los extremos del intervalo o los máximos y mínimos relativos.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + 1$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{2x}{x^2+1} + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$

Evaluamos:

$$x = -2,\; f(-2) = \ln 5 - 5 \approx -3{,}39$$

$$x = -1,\; f(-1) = \ln 2 - 4 \approx -3{,}31$$

$$x = 3,\; f(3) = \ln 10$$

Su mínimo absoluto es el punto $(-2, \ln 5 - 5)$ y su máximo absoluto es el punto $(3, \ln 10)$.

36 **La función de coste total de producción de x unidades de un determinado producto es:**

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 200$$

Se define la función de coste medio por unidad como:

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}$$

¿Cuál debe ser la producción para que sea mínimo el coste medio por unidad?

Buscamos el mínimo de la función $Q(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ igualando a 0 su derivada:

$$Q(x) = \frac{1}{2}x + 3 + \frac{200}{x}$$

$$Q'(x) = \frac{1}{2} - \frac{200}{x^2}$$

$$Q'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{2} - \frac{200}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 400 \;\rightarrow\; x = -20 \text{ (no válido)},\; x = 20$$

Comprobamos que hay un mínimo en $x = 20$:

$$Q''(x) = \frac{400}{x^3} \;\rightarrow\; Q''(20) = \frac{1}{20} > 0$$

Se deben producir 20 unidades para minimizar el coste medio por unidad.

37 **Una empresa quiere producir $C(t) = 200 + 10t$ unidades de un producto para vender a un precio $p(t) = 200 - 2t$ euros por unidad, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la producción.**

a) Calcula el beneficio si $t = 10$.

b) Escribe, dependiendo de t, la función de beneficio $(0 \le t \le 60)$.

c) Determina cuándo el beneficio es máximo.

a) Si $t = 10 \left< \begin{array}{l} C(10) = 200 + 10 \cdot 10 = 300 \text{ unidades} \\ p(10) = 200 - 2 \cdot 10 = 180 \text{ € por unidad} \end{array} \right.$

Beneficio: $C(10) \cdot p(10) = 300 \cdot 180 = 54\,000$ €

b) $B(t) = C(t) \cdot p(t) = (200 + 10t)(200 - 2t) = -20t^2 + 1\,600t + 40\,000$ si $0 \le t \le 60$

c) Para hallar el máximo, hacemos $B'(t) = 0$:

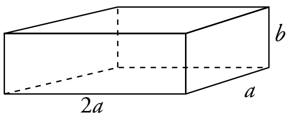
$B'(t) = -40t + 1\,600 = 0 \;\rightarrow\; t = 40$

Al cabo de 40 días se obtiene el máximo beneficio, que es:

$B(40) = -20 \cdot 40^2 + 1\,600 \cdot 40 + 40\,000 = 72\,000$ €

38 **Se quiere fabricar una caja de volumen máximo que sea el doble de larga que de ancha y que, además, la suma del ancho más el largo más el alto sea igual a un metro.**

Calcula las medidas que debe tener la caja y cuál será su volumen.



Volumen de la caja: $V = 2a \cdot a \cdot b = 2a^2 b$

$a + 2a + b = 1 \rightarrow b = 1 - 3a$

$V = 2a^2(1 - 3a) = 2a^2 - 6a^3$

Para hallar el máximo volumen, derivamos e igualamos a cero:

$$V' = 4a - 18a^2 = 0 \rightarrow a(4 - 18a) = 0 \begin{cases} a = 0 \text{ (no vale)} \\ a = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Comprobamos si el volumen es máximo para $a = \dfrac{2}{9}$:

$$V'' = 4 - 36a \rightarrow V''\left(\frac{2}{9}\right) = 4 - 36 \cdot \frac{2}{9} = -4 < 0, \text{ máximo.}$$

Si $a = \dfrac{2}{9}$ m, el largo será $2 \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{4}{9}$ m, y el alto, $1 - \dfrac{6}{9} = \dfrac{1}{3}$ m.

El volumen máximo es:

$$V = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{243} \text{ m}^3$$

39 **Una empresa dispone de 15 comerciales que proporcionan unos ingresos por ventas de 5 750 euros mensuales cada uno. Se calcula que, por cada nuevo comercial que se contrate, los ingresos de cada uno disminuyen en 250 euros. Calcula:**

a) La función que determina los ingresos mensuales que se obtendrían si se contrataran x comerciales más.

b) El número total de comerciales que debe tener la empresa para que los ingresos sean máximos, y cuáles serían estos.

a) Llamamos x al número de comerciales más que se contratan. La función que determina los ingresos mensuales será:

$$I(x) = (15 + x)(5\,750 - 250x) = -250x^2 + 2\,000x + 86\,250$$

b) Buscamos el máximo de la función $I(x)$ igualando a 0 su derivada:

$$I'(x) = -500x + 2\,000$$

$$I'(x) = 0 \rightarrow -500x + 2\,000 = 0 \rightarrow x = 4$$

Comprobamos que hay un máximo en $x = 4$:

$$I''(x) = -500 \rightarrow I''(4) = -500 < 0$$

Para que los ingresos sean máximos, la empresa debe tener 19 comerciales.

40 **Los beneficios de una empresa en sus primeros 8 años de funcionamiento vienen dados, en millones de euros, por la función:**

$$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t, \quad 0 \le t \le 8, \quad t \text{ en años}$$

a) Estudia la monotonía de $B(t)$ y sus extremos.

b) Describe la evolución de los beneficios de la empresa en sus 8 años de existencia.

a) Estudiamos el signo de la primera derivada:

$$B'(t) = \frac{3t^2}{4} - 6t + 9$$

$$B'(t) = 0 \rightarrow \frac{3t^2}{4} - 6t + 9 = 0 \rightarrow t = 2, \ t = 6$$

$B' > 0$ $\quad$ $B' < 0$ $\quad$ $B' > 0$

0 $\quad$ 2 $\quad$ 6 $\quad$ 8

$B(0) = 0, \; B(2) = 8, \; B(6) = 0, \; B(8) = 8$

La función es creciente en los intervalos (0, 2) y (6, 8); y es decreciente en el intervalo (2, 6).

Los puntos (0, 0) y (6, 0) son mínimos absolutos; y los puntos (2, 8) y (8, 8) son máximos absolutos.

b) Los beneficios de la empresa crecen durante los dos primeros años hasta que en el segundo año se alcanza un beneficio máximo de 8 millones de euros. A continuación descienden durante los cuatro años siguientes hasta que en el sexto año no se obtienen beneficios. Finalmente, crecen durante los dos años siguientes y en el octavo se vuelve a alcanzar un beneficio máximo de 8 millones de euros.

41 Sea $f(x)$ la función que representa el coste medio, en euros por kilogramo de alimento preparado, en una jornada en la que se producen x kg de alimento.

$$f(x) = 2 + x + \frac{9}{x}, \quad x > 0$$

a) Estudia la variación del coste medio. ¿Cuál debe ser la cantidad de producto que se debe preparar en una jornada para minimizar el coste medio por kilogramo?

b) Si el coste medio no se mantiene inferior a 10, será necesario un reajuste del proceso. ¿Cuál puede ser la producción para que no se tenga que hacer ese reajuste?

a) Para estudiar la variación analizamos el signo de la primera derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \to 1 - \frac{9}{x^2} = 0 \to x = -3 \text{ (no válido)}, \; x = 3$$

$f' < 0$ $\quad$ $f' > 0$

0 $\quad$ 3

El coste medio disminuye hasta que se producen 3 kg y a partir de esa cantidad, aumenta indefinidamente. Se deben preparar 3 kg en una jornada para minimizar el coste.

b) Para no tener que reajustar, tenemos que averiguar cuándo el coste medio no supera el valor 10.

$$2 + x + \frac{9}{x} = 10 \to x^2 - 8x + 9 = 0 \to x = 4 - \sqrt{7} \approx 1{,}35; \; x = 4 + \sqrt{7} \approx 6{,}65$$

Por tanto, tenemos que mantener la producción entre 1,35 kg y 6,65 kg de alimento preparado.

42 El número de vehículos que ha pasado cierto día por el peaje de una autopista viene dado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t-3}{3}\right)^2 + 2 & \text{si } 0 \le t \le 9 \\[2ex] 10 - \left(\dfrac{t-15}{3}\right)^2 & \text{si } 9 \le t \le 24 \end{cases}$$

donde N indica el número de vehículos y t el tiempo transcurrido en horas desde las 0:00 h.

a) ¿Entre qué horas aumentó el número de vehículos que pasaba por el peaje?

b) ¿A qué hora pasó el mayor número de vehículos? ¿Cuántos fueron?

a) Para saber cuándo la función es creciente, estudiaremos el signo de su derivada.

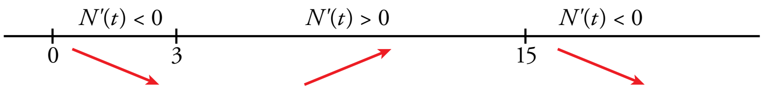
Las funciones con las que $N(t)$ está definida son continuas y derivables si $0 \le t < 9$ y si $9 < t \le 24$. Estudiamos la derivabilidad en $t = 9$:

$$N'(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t-3}{3}\right) & \text{si } 0 \le t < 9 \\[2ex] -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t-15}{3}\right) & \text{si } 9 < t \le 24 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} N'(9^-) = \dfrac{4}{3} \\ N'(9^+) = \dfrac{4}{3} \end{array}\right\} \ N \text{ es derivable en } t = 9.$$

$$N'(t) = 0 \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t-3}{3}\right) = 0 \ \rightarrow \ t = 3 \\ -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{t-15}{3}\right) = 0 \ \rightarrow \ t = 15 \end{array}\right.$$

Signo de $N'(t)$:



El número de vehículos aumentó entre las 3 h y las 15 h.

b) El máximo absoluto de una función continua definida en un intervalo cerrado se encuentra entre los máximos relativos de la función o en los extremos del intervalo:

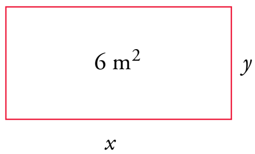
$N(0) = 3$; $N(15) = 10$; $N(24) = 1$

El mayor número de vehículos pasó a las 15 h, y fueron 10 vehículos.

43 **Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m² de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,50 € y el de tramo vertical, 3 €.**

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuál será ese coste mínimo?



a) Área $= x \cdot y = 6 \ \rightarrow \ y = \dfrac{6}{x}$

Perímetro $= 2x + 2y$

Coste $= 2{,}5 \cdot 2x + 3 \cdot 2y = 5x + 6y$

$C = 5x + \dfrac{36}{x}$

$C' = 5 - \dfrac{36}{x^2} = 0 \ \rightarrow \ x = \dfrac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2{,}68 \text{ m} \ \rightarrow \ y = \sqrt{5} \approx 2{,}24 \text{ m}$

$\left(C'' = \dfrac{72}{x^3};\ C''\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right) > 0 \ \rightarrow \ x = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right.$ es mínimo).

Las dimensiones son $x = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ m e $y = \sqrt{5}$ m.

b) $C = 5 \cdot \dfrac{6\sqrt{5}}{5} + 6\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \approx 26{,}83$ €

44 **El nivel medio diario de CO_2 de una ciudad depende del número de habitantes, p, y viene dado por la función:**

$$C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2} + 17}$$

con p en miles y C en partes por millón (ppm).

Si la evolución de la población de esa ciudad en t años es $p(t) = 3{,}1 + 0{,}1t^2$, en miles de habitantes, ¿con qué rapidez estará variando la concentración de CO_2 en ese lugar dentro de 3 años?

La expresión del nivel medio diario de CO_2 en función del tiempo en años es $C[p(t)] = (C \circ p)(t)$.

La variación de CO_2 viene dada por la derivada de la función anterior.

$$(C \circ p)'(t) = C'[p(t)] \cdot p'(t) = \frac{3{,}1 + 0{,}1t^2}{2\sqrt{\dfrac{(3{,}1 + 0{,}1t^2)^2}{2} + 17}} \cdot 0{,}2t$$

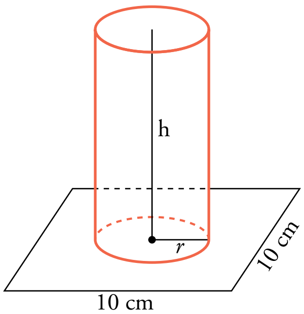
Ya que:

$$C'(p) = \frac{p}{2\sqrt{\frac{p^2}{2}+17}} \quad \text{y} \quad p'(t) = 0{,}2t$$

Si $t = 3 \rightarrow (C \circ p)'(3) = \dfrac{3{,}1+0{,}9}{2\sqrt{\dfrac{(3{,}1+0{,}9)^2}{2}+17}} \cdot 0{,}6 = 0{,}24$

Nos da un crecimiento de 0,24 partes por millón a los 3 años.

45 En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm^2. ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea máximo?



Área lateral cilindro $= 2\pi r \text{h} = 50 \text{ cm}^2 \rightarrow \text{h} = \dfrac{50}{2\pi r}$

El volumen del cilindro es:

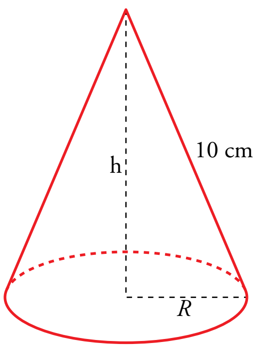
$V = \pi r^2 \text{h} = \pi r^2 \cdot \dfrac{50}{2\pi r} = 25r \rightarrow V(r) = 25r$

Al estar apoyada la base sobre el cuadrado, tenemos que el dominio de $V(r)$ es el intervalo (0, 5].

Tenemos que maximizar $V(r) = 25r$, con r (0, 5].

Como $V(r)$ es una función creciente, su máximo se alcanza en $r = 5$.

46 Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?



$\text{h}^2 + R^2 = 100 \rightarrow R^2 = 100 - \text{h}^2$

$Volumen = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \text{h} = \dfrac{1}{3}\pi(100 - \text{h}^2)\text{h} = \dfrac{1}{3}\pi(100\text{h} - \text{h}^3)$

Tenemos que maximizar la función volumen:

$$f(\text{h}) = \frac{1}{3}\pi(100\text{h} - \text{h}^3)$$

$$f'(\text{h}) = \frac{1}{3}\pi(100\text{h} - 3\text{h}^2)$$

$$f'(\text{h}) = 0 \rightarrow 100 - 3\text{h}^2 = 0 \rightarrow \text{h} = \pm\sqrt{\frac{100}{3}}$$

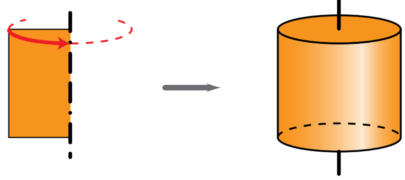
(consideramos la raíz positiva, pues $\text{h} \geq 0$).

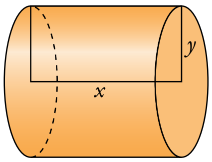
($f'(\text{h}) > 0$ a la izquierda de $\text{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$ y $f'(\text{h}) < 0$ a la derecha de $\text{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$. Por tanto, en $\text{h} = \sqrt{\dfrac{100}{3}}$ hay un máximo).

Así, el radio de la base será:

$$R^2 = 100 - \text{h}^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \rightarrow R = \sqrt{\frac{200}{3}}$$

47 **Halla la base y la altura de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm q ue, al girar alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo.**





Perímetro cartulina $= 2x + 2y = 60 \rightarrow x + y = 30 \rightarrow x = 30 - y$

Volumen $= \pi y^2 x = \pi y^2(30 - y) = \pi(30y^2 - y^3)$

Tenemos que maximizar la función:

$$V(y) = \pi(30y^2 - y^3)$$

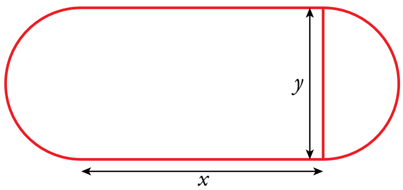
$$V'(y) = \pi(60y - 3y^2)$$

$$V'(y) = 60y - 3y^2 = 0 \rightarrow 3y(20 - y) = 0 \begin{cases} y = 0 \ \text{(no vale)} \\ y = 20 \rightarrow x = 10 \end{cases}$$

(En $y = 20$ hay un máximo, pues $V'(y) > 0$ a la izquierda de este valor y $V'(y) < 0$ a su derecha).

Los lados de la cartulina medirán 20 cm y 10 cm.

48 **Se quiere construir una pista de entrenamiento que consta de un rectángulo y de dos semicírculos adosados a dos lados opuestos del rectángulo. Si se desea que el perímetro de la pista sea de 200 m, halla las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.**



Perímetro de la pista $= 2x + \pi \cdot y = 200$

Despejamos: $y = \dfrac{200 - 2x}{\pi}$

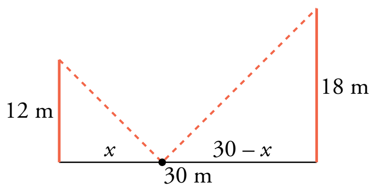
Área del rectángulo $= x \cdot y = x \cdot \dfrac{200 - 2x}{\pi} = \dfrac{200x - 2x^2}{\pi}$

Derivamos:

$$A' = \frac{200}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \rightarrow x = 50 \text{ m} \rightarrow y = \frac{100}{\pi} \text{ m}$$

$$\left(A'' = -\frac{4}{\pi};\ A''(50) < 0 \rightarrow x = 50 \text{ es máximo}\right).$$

49 **Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?**



La longitud total del cable es:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 18^2}; \text{ es decir: } L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,224};$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+144}} + \frac{2x-60}{2\sqrt{x^2-60x+1\,224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+144}} + \frac{x-30}{\sqrt{x^2-60x+1\,224}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-60x+1\,224}+(x-30)\sqrt{x^2+144}}{\sqrt{(x^2+144)(x^2-60x+1\,224)}}$$

$$L'(x) = 0 \;\rightarrow\; x\sqrt{x^2-60x+1\,224}+(x-30)\sqrt{x^2+144} = 0$$

$$x\sqrt{x^2-60x+1\,224} = -(x-30)\sqrt{x^2+144}$$

$$x^2(x^2-60x+1\,224) = (x-30)(x^2+144)$$

$$x^4-60x^3+1\,224x^2 = (x^2-60x+900)(x^2+144)$$

$$x^4-60x^3+1\,224x^2 = x^4+144x^2-60x^3-8\,640x+900x^2+129\,600$$

$$180x^2+8\,640x-129\,600 = 0$$

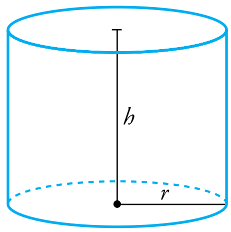
$$x^2+48x-720 = 0$$

$$x = \frac{-48\pm\sqrt{2\,304+2\,880}}{2} = \frac{-48\pm\sqrt{5\,184}}{2} = \frac{-48\pm72}{2} \quad \begin{cases} x = 12 \\ x = -60 \ \text{(no vale)} \end{cases}$$

(En $x = 12$ hay un mínimo, pues $L'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $L'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto del suelo debe situarse a 12 m del poste de 12 m (y a 18 m del poste de 18 m).

50 **Determina el radio de la base y la altura de un cilindro de 54 cm² de área total para que su volumen sea máximo.**



Área total = $2\pi r h + 2\pi r^2$

$$2\pi r h + 2\pi r^2 = 54 \;\rightarrow\; h = \frac{54-2\pi r^2}{2\pi r}$$

Volumen = $\pi r^2 h$

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{54-2\pi r^2}{2\pi r} = r(27-\pi r^2) = 27r-\pi r^3$$

Buscamos el máximo de V:

$$V' = 27-3\pi r^2 \;\rightarrow\; 27-3\pi r^2 = 0 \;\rightarrow\; r^2 = \frac{27}{3\pi} = \frac{9}{\pi} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \ \text{(la solución negativa no vale).}$$

Comprobamos si el volumen es máximo:

$$V'' = -6\pi r \;\rightarrow\; V''\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right) < 0, \ \text{es un máximo.}$$

$$\text{Si } r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \;\rightarrow\; h = \frac{27-\pi(9/\pi)}{\pi(3/\sqrt{\pi})} = \frac{18\sqrt{\pi}}{3\pi} = \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi}$$

Por tanto, para que el volumen sea máximo debe ser:

$$r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \approx 1{,}7 \text{ cm} \ \text{ y } h = \frac{6\sqrt{\pi}}{\pi} \approx 3{,}4 \text{ cm}$$

51 **Dada f: $[1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.**

La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $f'(a)$. Tenemos que hallar el máximo de:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e]$$

Calculamos la derivada de $f'(x)$; es decir, $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 2 - x = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \in [1, e]$$

(En $x = 2$ hay un máximo relativo de $f'(x)$, pues $f''(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $f''(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos $f'(x)$ en $x = 2$ y en los extremos del intervalo $[1, e]$:

$$f'(2) = \frac{1}{4} = 0{,}25;\; f'(1) = 0;\; f'(e) = \frac{e-1}{e^2} \approx 0{,}23$$

Por tanto, la recta tangente con pendiente máxima es la recta tengente en $x = 2$. La hallamos:

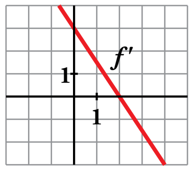
$$f(2) = \frac{1}{2} + ln\ 2;\; f'(2) = \frac{1}{4}$$

La recta es: $y = \frac{1}{2} + ln\ 2 + \frac{1}{4}(x - 2)$

Página 191

Cuestiones teóricas

52 **Observando la gráfica de la función f', derivada de f, di:**



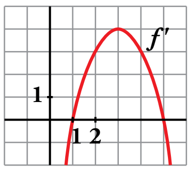
a) Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) ¿Tiene f máximos o mínimos?

a) f es creciente $(f' > 0)$ en el intervalo $(-\infty, 2)$ y decreciente $(f' < 0)$ en $(2, +\infty)$.

b) f tiene un máximo en $x = 2$. ($f'(2) = 0$ y la función pasa de creciente a decreciente).

53 **Esta es la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explica si $f(x)$ tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión en $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.**



$x = 1$: en este punto, la función tiene un mínimo, porque pasa de ser decreciente $(f' < 0)$ a creciente $(f' > 0)$, y $f'(1) = 0$.

$x = 3$: en este punto, f tiene un punto de inflexión, ya que $f''(3) = 0$.

$x = 5$: en este punto, f tiene un máximo, pues pasa de ser creciente a decreciente y $f'(5) = 0$.

54 **La función f tiene derivadas primera y segunda y es $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$.**

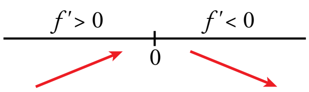
¿Puede presentar f un máximo relativo en el punto a? En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí puede presentar un máximo. Por ejemplo:

$f(x) = -x^4$ en $x = 0$ es tal que:

$$f'(x) = -4x^3$$

$$f''(x) = -12x^2$$



Por tanto: $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$

En $(0, 0)$ hay un máximo relativo.

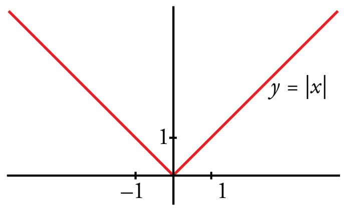
55 **Considera la función $|x|$ (valor absoluto de x):**

a) ¿Presenta un mínimo relativo en algún punto?

b) ¿En qué puntos es derivable?

Razona tus respuestas.

a)



$f(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = 0$, pues $f(0) = 0 < f(x)$ si $x \neq 0$.

De hecho, es el mínimo absoluto de $f(x)$.

b) $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$.

Por tanto, f es derivable para $x \neq 0$.

56 **Si $f'(a) = 0$, ¿qué proposición es cierta?:**

a) f tiene un máximo o un mínimo en el punto $x = a$.

b) f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

c) f tiene en el punto $x = a$ tangente paralela al eje X.

Si $f'(a) = 0$, solo podemos asegurar que f tiene en $x = a$ tangente horizontal (paralela al eje OX).

Podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$.

Por tanto, solo es cierta la proposición c).

Para profundizar

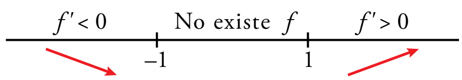
57 **Halla el dominio de definición y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:**

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

La función está definida cuando $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} > 0$. Como el denominador es siempre positivo, debe ser $x^2 - 1 > 0$. Por tanto el dominio de definición es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$ (este punto no es válido porque no está en el dominio de definición).



La función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.

58 **Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y los mínimos de la función dada por:**

$$y = |x^2 + 2x - 3|$$

Definimos la función por intervalos. Para ello, calculamos los puntos donde $f(x) = 0$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos la derivada de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<-3 \\ -2x-2 & \text{si } -3 \le x < 1 \\ 2x+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \neq f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \neq f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

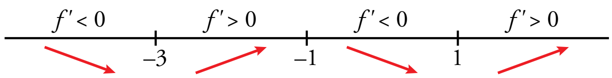
  $2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

  Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

  $-2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$ y $f'(x) = -2x - 2$ para $-3 < x < 1$

  Por tanto, $f'(x)$ se anula en $x = -1 \rightarrow f(-1) = 4$.

- Signo de la derivada:



- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$.

  Es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$.

  Tiene un máximo en $(-1, 4)$.

  Tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$. Son los puntos donde f no es derivable.

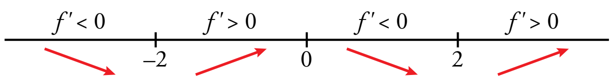
59 Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x<-2 \\ -x^2+4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2-4 & \text{si } x>2 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x<-2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x>2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.
- Signo de la derivada:



- La función tiene un máximo relativo en $(0, 4)$.

  No tiene máximo absoluto $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \right)$.

- Tiene un mínimo relativo en $(-2, 0)$ y otro en $(2, 0)$. En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \geq 0$ para todo x.

60 Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) Determina el valor de a y b sabiendo que $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) ¿Tiene puntos singulares?

a) Exigimos la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

Veamos la continuidad:

$$\lim_{x \to 0^-} (x + 2e^{-x}) = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} a\sqrt{b-x} = a\sqrt{b}$$

Cuando $a\sqrt{b} = 2$, la función es continua ya que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Veamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si } \ x < 0 \\ \dfrac{-a}{2\sqrt{b - x}} & \text{si } \ x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = \dfrac{-a}{2\sqrt{b}} \end{cases} \rightarrow -1 = \frac{-a}{2\sqrt{b}}$$

Si se cumple la condición anterior será derivable en $x = 0$ ya que coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} a\sqrt{b} = 2 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{b}} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow a = 2, \ b = 1$$

La función queda así: $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } \ x < 0 \\ 2\sqrt{1 - x} & \text{si } \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si } \ x < 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x}} & \text{si } \ 0 \le x < 1 \end{cases}$

b) Los puntos singulares solo pueden estar en el primer trozo ya que la derivada no se anula cuando $x \ge 0$.

$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - 2e^{-x} = 0 \rightarrow x = \ln 2 > 0$ (este punto no es válido porque no pertenece al intervalo de definición)

Luego no tiene puntos singulares.

Autoevaluación

Página 191

1 a) Escribe la ecuación de la tangente a la siguiente curva en su punto de inflexión:

$$f(x) = 3x^2 - (x+2)^3$$

b) ¿Existe algún punto en el que la recta tangente sea paralela al eje X?

a) Hallamos el punto en el que se anula su segunda derivada:

$$f'(x) = 6x - 3(x+2)^2$$

$$f''(x) = 6 - 6(x+2) = -6x - 6$$

$$f''(x) = 0 \to -6x - 6 = 0 \to x = -1$$

Observamos que la función pasa de cóncava a convexa en el punto de abscisa $x = -1$ estudiando el signo de la derivada segunda. Luego en $x = -1$ hay un punto de inflexión.

$$x = -1,\ f(-1) = 2,\ f'(-1) = -9$$

La recta tangente en su punto de inflexión es $y = 2 - 9(x+1)$.

b) Los valores de x en los que la recta tangente es paralela al eje X son aquellos en los que se anula la derivada de f.

$$f'(x) = 0 \to 6x - 3(x+2)^2 = 0 \to x^2 + 2x + 4 = 0 \to \text{No tiene solución.}$$

Por tanto, no hay puntos con tangente horizontal.

2 Dada la función $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4x + 3}$ se pide:

a) Sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) Máximos y mínimos relativos.

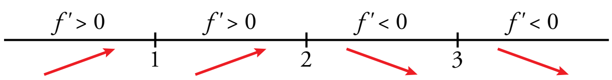
a) Calculamos el dominio de la función:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \to x = 1,\ x = 3$$

La función no está definida en $x = 1$ y $x = 3$. En estos valores no es continua ni derivable. El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.

$$f'(x) = \frac{-14x + 28}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \to -14x + 28 = 0 \to x = 2$$



Los intervalos de crecimiento son $(-\infty, 1)$ y $(1, 2)$.

Los intervalos de decrecimiento son $(2, 3)$ y $(3, +\infty)$.

b) $x = 2,\ f(2) = -8$

En el punto $(2, -8)$ hay un máximo relativo.

3 La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.

Para que no tenga extremo relativo en $x = 1$ debe ser $f''(1) = 0$, ya que, en caso contrario, al ser $f'(1) = 0$, habría un extremo relativo en $x = 1$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$f(1) = 0 \;\rightarrow\; 1 + a + b + c = 0$$

$$f'(1) = 0 \;\rightarrow\; 3 + 2a + b = 0$$

$$f''(1) = 0 \;\rightarrow\; 6 + 2a = 0$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c = -1 \\ 3 + 2a + b \quad = 0 \\ 6 + 2a \qquad\; = 0 \end{array}\right\} \rightarrow\; a = -3,\; b = 3,\; c = -1$$

4 **El número de personas ingresadas en un hospital por una infección después de t semanas viene dado por la función:**

$$N(t) = \frac{350t}{2t^2 - 3t + 8} \quad \text{siendo } t \geq 0$$

Calcula el máximo de personas ingresadas y la semana en que ocurre. ¿A partir de qué semana, después de alcanzar el máximo, el número de ingresados es menor que 25?

- Para calcular el máximo, derivamos e igualamos a cero:

$$N'(t) = \frac{350(2t^2 - 3t + 8) - 350t(4t - 3)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = \frac{350(-2t^2 + 8)}{(2t^2 - 3t + 8)^2} = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow -2t^2 + 8 = 0 \;\rightarrow\; t^2 = 4 \;\begin{cases} t = -2 \;\; (\text{no vale, pues } t \geq 0) \\ t = 2 \;\rightarrow\; N(2) = \dfrac{350 \cdot 2}{2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 8} = 70 \end{cases}$$

El número máximo de personas ingresadas es 70, y ocurre en la 2.ª semana.

- Hemos de ver cuándo $\dfrac{350t}{2t^2 - 3t + 8} < 25$.

$$350t < 50t^2 - 75t + 200 \;\rightarrow\; 50t^2 - 425t + 200 > 0 \;\rightarrow\; 2t^2 - 17t + 8 > 0$$

Resolvemos la inecuación:

$$f(t) = 2t^2 - 17t + 8 = 0 \;\begin{cases} t = 8 \\ t = 0,5 \end{cases}$$

$f(t) > 0$	0,5	$f(t) < 0$	8	$f(t) > 0$

$f(t) > 0$ para $t \in (0; 0,5) \cup (8, +\infty)$.

Después de alcanzar el máximo en $t = 2$, a partir de $t = 8$, el número de personas ingresadas es menor que 25.

5 **Sea $B(x) = ax + b\sqrt{x}$ la función de beneficios de una empresa. Sabemos que el beneficio máximo es 50 000 euros y se obtiene si $x = 100$ unidades producidas. Calcula a y b.**

$B(x) = ax + b\sqrt{x}$

Sabemos que $B(100) = 50$ y $B'(100) = 0$

$$B(100) = 100a + 10b = 50$$

$$B'(x) = a + \frac{b}{2\sqrt{x}} \;\rightarrow\; B'(100) = a + \frac{b}{20} = 0$$

Resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 100a + 10b = 50 \\ a + \dfrac{b}{20} = 0 \;\rightarrow\; a = -\dfrac{b}{20} \end{cases}$$

$$100\left(-\frac{b}{20}\right) + 10b = 50 \;\rightarrow\; \frac{-b}{2} + b = 5 \;\rightarrow\; -b + 2b = 10 \;\rightarrow\; b = 10;\; a = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, $B(x) = -\dfrac{x}{2} + 10\sqrt{x}$.

6 **En un parque natural, el tamaño de una población de aves se ajusta a la función:**

$$N(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50, & 0 \le t \le 10 \\ 95 - \dfrac{250}{t}, & t > 10 \end{cases}$$

con $N(t)$ en cientos y t, en años.

a) ¿A partir de qué año crecerá el número de aves?

b) ¿Es mínima esa población algún año?

c) ¿A qué valor tiende la población con el paso del tiempo?

d) Calcula el intervalo de tiempo en el que la población se mantiene entre 5 000 y 7 500 aves.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones continuas en sus respectivos intervalos de definición.

En $t = 10$ también es continua, ya que $\lim\limits_{t \to 10^-} (t^2 - 8t + 50) = \lim\limits_{t \to 10^+} \left(95 - \dfrac{250}{t}\right) = N(10) = 70$

$$N'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & \text{si } 0 < t < 10 \\ \dfrac{250}{t^2} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

La derivada solo se anula cuando $2t - 8 = 0 \rightarrow t = 4$.

A partir de ese instante, la derivada es positiva cuando $4 < t < 10$ y cuando $t > 10$. Por tanto, la población crecerá a partir del cuarto año.

b) La población es mínima cuando $t = 4$ y es $N(4) = 34$, es decir, 3 400 aves. Esto es debido a que la función decrece cuando $0 < t < 4$ y a lo comentado en el apartado anterior.

c) Para hallar ese valor calculamos:

$$\lim_{t \to +\infty} \left(95 - \frac{250}{t}\right) = 95$$

Es decir, con el paso del tiempo la población tiende a ser de 9 500 aves.

d) Como $N(0) = 50$, la población empieza siendo de 5 000 aves. Desciende hasta las 3 400 cuando $t = 4$ y a partir de ahí crece. Cuando $t = 10$, la población es de 7 000 aves, como se ha visto en el apartado a). Para que alcance las 7 500 debe cumplirse que:

$$75 = 95 - \frac{250}{t} \rightarrow t = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

Por tanto, la población se mantiene entre 5 000 y 7 500 aves cuando $0 \le t \le 12{,}5$.

7 **Se quiere construir una caja con tapa que tenga el máximo volumen y que sea el doble de ancha que de larga. Se dispone de 30 m^2 de chapa. ¿Qué medidas de largo y de ancho debe tener la caja?**

Llamamos x al largo e y al alto. Entonces, el ancho es $2x$.

Por tanto, la cantidad de chapa usada es $6xy + 4x^2 = 30$.

Queremos que la función volumen sea máxima $\rightarrow V = 2x \cdot x \cdot y = 2x^2y$ máxima.

Despejamos y en la primera igualdad: $6xy + 4x^2 = 30 \rightarrow y = \dfrac{30 - 4x^2}{6x} = \dfrac{15 - 2x^2}{3x}$

y sustituimos en la función volumen: $V = 2x^2 \cdot \dfrac{15 - 2x^2}{3x} = \dfrac{2x(15 - 2x^2)}{3} = \dfrac{30x - 4x^3}{3}$

Derivamos e igualamos a cero:

$$V' = 10 - 4x^2;\ V' = 0 \rightarrow 10 - 4x^2 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ (no válida)},\ x = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Como $V'' = -8x$ es negativa en $x = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$, en este valor hay un máximo relativo.

Las dimensiones pedidas son: largo $= \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ m; ancho $= 2\sqrt{\dfrac{5}{2}} = \sqrt{10}$ m; alto $= \dfrac{10}{3\sqrt{\dfrac{5}{2}}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ m