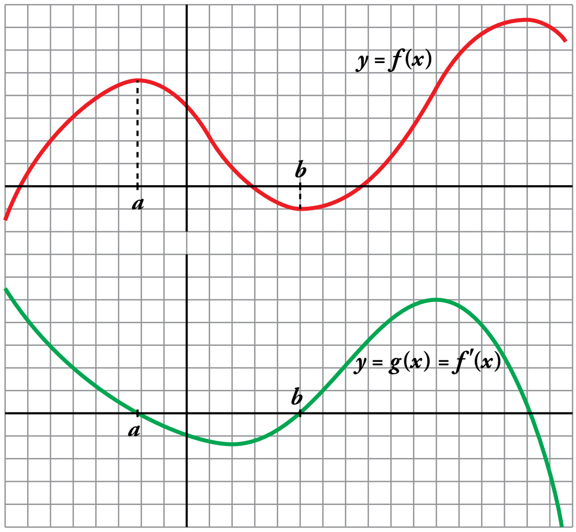
Resuelve

Página 155

Función derivada

- **Continúa escribiendo las razones por las cuales $g(x)$ es una función cuyo comportamiento responde al de la derivada de $f(x)$.**



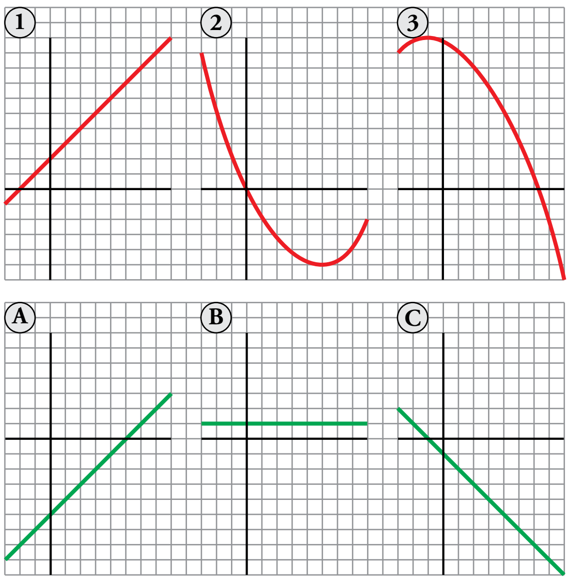
- En el intervalo (a, b), $f(x)$ es decreciente. Por tanto, su derivada es negativa. Es lo que le pasa a $g(x)$ en (a, b).
- La derivada de f en b es 0: $f'(b) = 0$. Y también es $g(b) = 0$.
- En general:

  $g(x) = f'(x) = 0$ donde $f(x)$ tiene tangente horizontal.

  $g(x) = f'(x) > 0$ donde $f(x)$ es creciente.

  $g(x) = f'(x) < 0$ donde $f(x)$ es decreciente.

- **Las tres gráficas de abajo, A, B y C, son las funciones derivadas de las gráficas de arriba, 1, 2 y 3, pero en otro orden. Explica razonadamente cuál es la de cada una.**



1) B

2) A

3) C

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente, y es negativa donde la función decrece.

1 Derivada de una función en un punto

Página 157

1 Halla, paso a paso, las derivadas siguientes:

a) $4x - x^2$ **en** $x_0 = 3$

b) x^3 **en** $x_0 = 2$

c) $\frac{1}{x}$ **en** $x_0 = 2$

d) $(x-3)^2$ **en** $x_0 = 1$

a) $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{4(3+h)-(3+h)^2-3}{h} = \frac{12+4h-9-6h-h^2-3}{h} = -h-2$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} (-h-2) = -2$$

b) $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^3-8}{h} = \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = h^2+6h+12$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (h^2+6h+12) = 12$$

c) $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \frac{-1}{2(h+2)}$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2(h+2)} = -\frac{1}{4}$$

d) $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h-3)^2-4}{h} = \frac{(h-2)^2-4}{h} = h-4$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (h-4) = -4$$

2 Halla, paso a paso, la derivada lateral $f'(0^+)$ de $f(x) = \sqrt{x}$ y justifica la respuesta.

Si $h > 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \to$ No existe $f'(0^+)$.

3 ¿Qué condición debe cumplir una función, f, para ser derivable en el intervalo [1, 5)?

Para que f sea derivable en [1, 5), debe serlo en el intervalo abierto (1, 5) y, además, debe existir la derivada lateral $f'(1^+)$.

4 **Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$$

- Continuidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (3x - 9) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 3$.

- Derivabilidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 3 = 3 = f'(3^+) \end{array}\right\} \text{Las derivadas laterales existen y coinciden.}$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x_0 = 3$. Además, $f'(3) = 3$.

5 **Estudia la derivabilidad en $x_0 = 0$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 3, & x \le 0 \\ -x^2 + 2x + 3, & x > 0 \end{cases}$$

- Continuidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 5x + 3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + 2x + 3) = 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3. \text{ Además, } f(0) = 3.$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$.

- Derivabilidad en $x_0 = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 0 \\ -2x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - 5) = -5 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x + 2) = 2 = f'(0^+) \end{cases}$$

Las derivadas laterales son finitas pero no coinciden. Por tanto, no es derivable en $x_0 = 0$.

6 **Estudia la derivabilidad de la siguiente función en $x = 0$:**

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

- Continuidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-\sqrt{-x}) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x}) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0. \text{ Además, } f(0) = 0.$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$.

- Derivabilidad en $x_0 = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \end{cases}$$

Las derivadas laterales no existen al ser infinitos los límites. Por tanto, no es derivable en $x_0 = 0$.

7 Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$$

- Si $x \neq 0$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.
- Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, ha de ser: $n = 5$.

- Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -2x = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable en $x = 0$, ha de ser: $-m = 0 \;\rightarrow\; m = 0$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ para $m = 0$ y $n = 5$.

Página 163

1 **Utiliza las reglas de derivación para calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

c) $f(x) = ln\ \dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-tg\ x}{1+tg\ x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-tg\ x}{1+tg\ x}}$

f) $f(x) = ln\ \sqrt{e^{tg\ x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log(sen\ x \cdot cos\ x)^2$

i) $f(x) = tg^2\ x + sen^2\ x$

j) $f(x) = sen\ \sqrt{x+1} \cdot cos\ \sqrt{x-1}$

k) $f(x) = 7^{sen\,(x^2+1)}$

l) $f(x) = sen\,(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{sen\ x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = cos^2\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$

b) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$$

c) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

De otra forma: Si tomamos logaritmos previamente:

$f(x) = ln\ (1-x) - ln\ (1+x)$. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1+tg^2\ x)(1+tg\ x) - (1-tg\ x) \cdot (1+tg^2\ x)}{(1+tg\ x)^2} =$

$$= \frac{(1+tg^2\ x)\,[-1-tg\ x-1+tg\ x]}{(1+tg\ x)^2} = \frac{-2(1+tg^2\ x)}{(1+tg\ x)^2}$$

De otra forma: Si tenemos en cuenta el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+tg\ x)^2} \cdot D[tg\ x] = \frac{-2}{(1+tg\ x)^2} \cdot (1+tg^2\ x) = \frac{-2(1+tg^2\ x)}{(1+tg\ x)^2}$$

e) Teniendo en cuenta el resultado obtenido en d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-tg\ x}{1+tg\ x}}} \cdot \frac{-2(1+tg^2\ x)}{(1+tg\ x)^2} = \frac{-(1+tg^2\ x)}{\sqrt{(1-tg\ x)(1+tg\ x)^3}}$$

También podríamos haber llegado a este resultado utilizando los resultados del apartado en b).

f) $f(x) = ln\ \sqrt{e^{tg\ x}} = ln\ e^{(tg\ x)/2} = \dfrac{tg\ x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\ x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)/2}$

$f'(x) = 3^{(x+1)/2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot ln\ 3 = \dfrac{ln\ 3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\ (sen\ x \cdot cos\ x)^2 = 2\,[log\ (sen\ x + log\ (cos\ x)]$

$f'(x) = 2\left[\dfrac{cos\ x}{sen\ x} \cdot \dfrac{1}{ln\ 10} + \dfrac{-sen\ x}{cos\ x} \cdot \dfrac{1}{ln\ 10}\right] = \dfrac{2}{ln\ 10} \cdot \dfrac{cos^2\ x - sen^2\ x}{sen\ x \cdot cos\ x} =$

$= \dfrac{4}{ln\ 10} \cdot \dfrac{cos^2\ x - sen^2\ x}{2sen\ x \cdot cos\ x} = \dfrac{4}{ln\ 10} \cdot \dfrac{cos\ 2x}{sen\ 2x} = \dfrac{4}{ln\ 10 \cdot tg\ 2x}$

De otra forma:

$f(x) = log\ (sen\ x \cdot cos\ x)^2 = 2\ log\left(\dfrac{sen\ 2x}{2}\right)$

$f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{ln\ 10} \cdot \dfrac{cos\ 2x}{(sen\ 2x)/2} = \dfrac{4}{ln\ 10 \cdot tg\ 2x}$

i) $f'(x) = 2tg\ x \cdot D[tg\ x] + 2sen\ x \cdot D[sen\ x] = 2tg\ x \cdot (1 + tg^2\ x) + 2sen\ x \cdot cos\ x = 2\,(tg\ x + tg\ x) + 2sen\ x \cdot cos\ x$

j) $f'(x) = \dfrac{cos\ \sqrt{x+1} \cdot cos\ \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{sen\ \sqrt{x+1} \cdot (-sen\ \sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}} =$

$= \dfrac{cos\ \sqrt{x+1} \cdot cos\ \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{sen\ \sqrt{x+1} \cdot sen\ \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$

k) $f'(x) = 7^{sen\,(x^2+1)} \cdot ln\ 7 \cdot D[sen\,(x^2+1)] = 7^{sen\,(x^2+1)} \cdot ln\ 7 \cdot 2x \cdot cos\,(x^2+1)$

l) $f'(x) = cos\ (3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}) \cdot \left(15x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{sen\ x + x^2 + 1}} \cdot (cos\ x + 2x) = \dfrac{cos\ x + 2x}{2\sqrt{sen\ x + x^2 + 1}}$

n) $f'(x) = 2\ \ cos\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot \left[-sen\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right] \cdot \dfrac{1 + 2\,(3-x) \cdot (-1)}{\sqrt[3]{(x + (3-x^2))^2}} =$

$= \dfrac{-2\ \ cos\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\ sen\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot (2x-5)}{3\sqrt[3]{x + (3-x)^2)^2}} = \dfrac{(5-2x) \cdot sen\ (2\sqrt[3]{x + (3-x)^2})}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}}$

2 Halla las derivadas primera, segunda y tercera de las siguientes funciones:

a) $y = x^5$ **b)** $y = x\ cos\ x$ **c)** $y = sen^3\ x + cos^2\ x + x$

a) $y = x^5 \;\rightarrow\; y' = 5x^4;\ \ y'' = 20x^3;\ \ y''' = 60x^2$

b) $y = x\ cos\ x \;\rightarrow\; y' = cos\ x - x\ sen\ x$

$y'' = -sen\ x - sen\ x - x\ cos\ x = -2sen\ x - x\ cos\ x$

$y''' = -2cos\ x - cos\ x + x\ sen\ x = -3cos\ x + x\ sen\ x$

c) $f'(x) = 3sen^2\, x \cdot D[sen\, x] + 2cos\, x \cdot D[cos\, x] + 1 = 3sen^2\, x \cdot cos\, x - 2cos\, x \cdot sen\, x + 1$

$$f''(x) = 6sen\, x \cdot cos\, x - 3sen^2\, x \cdot sen\, x + 2sen^2\, x - 2cos^2\, x = 6sen\, x \cdot cos^2\, x - 3sen^3 x + 2sen\, x$$

$$f'''(x) = 6cos\, x \cdot cos^2\, x + 6sen\, x \cdot 2cos\, x \cdot D[cos\, x] - 9sen^2\, x \cdot D[sen\, x] + 4sen\, x \cdot D[sen\, x] - 4cos\, x =$$

$$= 6cos^3\, x - 12sen^2\, x \cdot cos\, x - 9sen^2\, x \cdot cos\, x + 4sen\, x \cdot cos\, x + 4cos\, x \cdot sen\, x =$$

$$= 6cos^3\, x - 21cos\, x \cdot sen^2\, x + 8cos\, x \cdot sen\, x$$

3 **Calcula $f'(1)$ siendo:**

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \frac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \frac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \frac{13}{30}\, x^{-17/30} = \frac{13\,\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}\,\sqrt[30]{x^{17}}$$

Por tanto: $f'(1) = \dfrac{13\,\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

4 **Calcula $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ siendo:**

$$f(x) = (cos^2\, 3x - sen^2\, 3x) \cdot sen\, 6x$$

$$f(x) = (cos^2\, 3x - sen^2\, 3x) \cdot sen\, 6x = cos\, 6x \cdot sen\, 6x = \frac{sen\, 12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12\ cos\, 12x}{2} = 6cos\, 12x$$

Por tanto: $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot cos\, \dfrac{12\pi}{6} = 6 \cdot cos\,(2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$

5 **Calcula $f'(0)$ siendo:**

$$f(x) = ln\,\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2$$

$$f(x) = ln\,\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}(2x + 1)^2 = \frac{1}{2}\, ln\,(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,(2x + 1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot (2x + 1)^2 = \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{4\,(2x + 1)}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{8x + 4}{\sqrt{3}} = \frac{-16x^3 - 24x^2 + (2\sqrt{3} - 24)\,x + \sqrt{3} - 8}{\sqrt{3}\,(2x^2 + 2x + 2)}$$

Por tanto: $f'(0) = \dfrac{\sqrt{3} - 8}{2\sqrt{3}}$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 164

1. Función derivada a partir de la definición de derivada

Hazlo tú. Obtén la función derivada de la siguiente función utilizando la definición de derivada:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

Representa las gráficas de f y de f'.

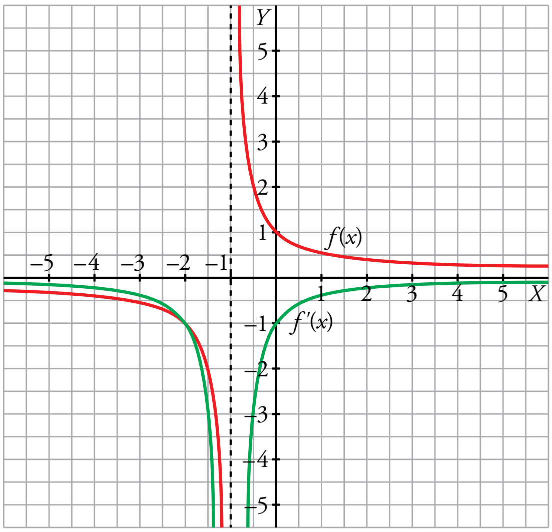
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = \frac{1}{x+h+1}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x-h-1}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{-h}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-1}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h+1)(x+1)} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$



2. Estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos

Hazlo tú. Estudia la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^3 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Representa las gráficas de f y f'.

$f(x)$ está definida por funciones polinómicas en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$. Por tanto, es continua y derivable en ellos.

En $x = -1$ es continua porque $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = -1$.

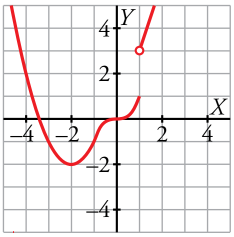
En $x = 1$ no lo es porque no existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ ya que los límites laterales son distintos:

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} x^3 = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} 3x = 3 \end{cases}$$

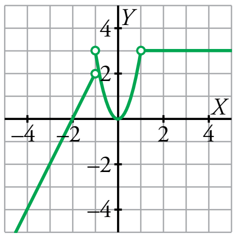
No puede ser derivable en $x = 1$ por no ser continua.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < -1 \\ 3x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x \end{cases} \to \begin{cases} f'(-1^-) = 2 \\ f'(-1 +) = 3 \end{cases} \to \text{No es derivable en } x = -1.$$

Gráfica de $f(x)$:



Gráfica de $f'(x)$:



Página 165

3. Reglas de derivación

Hazlo tú. **Calcula las derivadas de estas funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{(2x-3)^2}$

b) $f(x) = \sqrt[5]{3 - x^3}$

c) $f(x) = -x^3 e^{2x}$

d) $f(x) = \dfrac{sen\ 3x}{2}$

e) $f(x) = ln\left(\dfrac{3 - 2x^2}{(3x+1)^2 \cdot 3^x}\right)$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)^2 - (x-1) \cdot 2(2x-3) \cdot 2}{(2x-3)^4} = \dfrac{(2x-3) - 4(x-1)}{(2x-3)^3} = \dfrac{-2x+1}{(2x-3)^3}$

b) $f(x) = (3 - x^3)^{1/5} \to f'(x) = \dfrac{1}{5}(3 - x^3)^{(1/5)-1}(-3x^2) = \dfrac{-3x^2}{5}(3 - x^3)^{-4/5} = \dfrac{-3x^2}{5\sqrt[5]{(3 - x^3)^4}}$

c) $f'(x) = -3x^2 e^{2x} - x^3 e^{2x} \cdot 2 = -e^{2x} x^2 (2x + 3)$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2} cos\ 3x \cdot 3 = \dfrac{3}{2} cos\ 3x$

e) $f(x) = ln(3 - 2x^2) - 2ln(3x + 1) - x\ ln\ 3 \to f'(x) = \dfrac{-4x}{3 - 2x^2} - \dfrac{6}{3x+1} - ln\ 3$

4. Función continua y derivable

Hazlo tú. **Calcula a y b para que f sea derivable.**

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2ax & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si $x \neq 1$ la función es derivable. Estudiamos ahora su derivabilidad en $x = 1$.

- f debe ser continua en $x = 1$:

  $$f(1) = a + b; \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (2x^3 - 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (ax^2 + b) = a + b \end{cases}$$

  Para que f sea continua en $x = 1$, debe cumplirse que $a + b = 1$.

- f debe ser derivable en $x = 1$:

  $f'(1^-) = 6$

  $f'(1^+) = 2a$

  Para que f sea derivable en $x = 1$, debe cumplirse que $2a = 6$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a = 6 \end{cases}$, obtenemos los valores pedidos:

$$2a = 6 \to a = 3 \to 3 + b = 1 \to b = -2$$

Por tanto, si $a = 3$ y $b = -2$ la función es derivable.

Página 166

5. Función derivada

Hazlo tú. **Calcula la función derivada de esta función y representa f y f'.**

$$f(x) = |2 - x| + |x + 1|$$

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ -2 + x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \qquad |x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

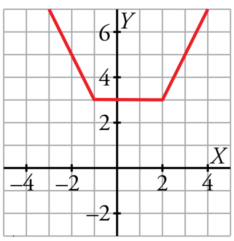
$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ -1 + 2x & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \to \text{Es una función continua por ser suma de funciones continuas.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

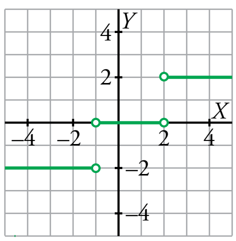
$f'(-1^-) = -2,\ f'(-1^+) = 0 \to$ No es derivable en $x = -1$.

$f'(2^-) = 0,\ f'(2^+) = 2 \to$ No es derivable en $x = 2$.

Gráfica de $f(x)$:



Gráfica de $f'(x)$:



6. Valor de un parámetro para que f sea derivable

Hazlo tú. Halla el valor que ha de tener a para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^4 - 2x^2 - 2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ está definida por funciones polinómicas en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$. Por tanto, es continua y derivable en ellos.

Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = -2 \;\to\; \text{La función es continua para cualquier valor de } a.$$

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax^3 - 4x & \text{si } x < 0 \;\to\; f'(0^-) = 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \;\to\; f'(0^+) = 0 \end{cases} \;\to\; f(x) \text{ es derivable para cualquier valor de } a.$$

Por tanto, la función es derivable en $\mathbb{R}$ para cualquier valor de a.

Ejercicios y problemas guiados

Página 167

1. Obtención de los valores de dos parámetros para que la función sea derivable

Calcular los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en x = 1:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{a}{x} + b \cdot e^{x-1} & si \quad x \le 1 \\ \dfrac{2}{x+1} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Como queremos que la función sea derivable en $x = 1$, primero debe ser continua en dicho punto.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 + \dfrac{a}{x} + b \cdot e^{x-1}\right) = 1 + a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{x+1} = 1 \end{cases} \to 1 + a + b = 1 \to a + b = 0$$

Además, como $f(1) = 1 + a + b$, la relación anterior garantiza la continuidad en $x = 1$.

Por otra parte, para que sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales en dicho punto deben ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{a}{x^2} + b \cdot e^{x-1} & \text{si } x < 1 \to f'(1^-) = 2 - a + b \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \to f'(1^+) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \to 2 - a + b = -\dfrac{1}{2}$$

Resolvemos el sistema y se obtienen los valores buscados:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 0 \\ -a + b &= -\frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \to a = \frac{5}{4},\ b = -\frac{5}{4}$$

2. Simplificación de la función antes de derivarla utilizando las propiedades de los logaritmos

Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = ln\sqrt{3^x \cdot cos^3 x}$ ***b)*** $y = ln\dfrac{4^x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a) $y = ln(3^x cos^3 x)^{1/2} = \dfrac{1}{2}(x\, ln\, 3 + 3 ln\, cos\, x) \to y' = \dfrac{1}{2}\left(ln\, 3 - 3\dfrac{sen\, x}{cos\, x}\right) = \dfrac{ln\, 3}{2} - \dfrac{3}{2} tg\, x$

b) $y = ln\, 4^x - ln(x^2 - 1)^{1/2} = x ln\, 4 - \dfrac{1}{2} ln(x^2 - 1) \to y' = ln\, 4 - \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2 - 1} = ln\, 4 - \dfrac{x}{x^2 - 1}$

3. Puntos de derivada nula

Calcular los puntos de la siguiente función en los que la derivada se anula:

$$f(x) = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

$f(x) = 2x\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{4x^2(100 - x^2)} = \sqrt{400x^2 - 4x^4} \to f'(x) = \dfrac{800x - 16x^3}{2\sqrt{400x^2 - 4x^4}} = \dfrac{400x - 8x^3}{\sqrt{400x^2 - 4x^4}}$

$f'(x) = 0 \to 400x - 8x^3 = 0 \to x = \sqrt{50},\ x = -\sqrt{50},\ x = 0$ (no válido porque en ese punto se anula el denominador de la derivada).

$x = \sqrt{50} \to f(\sqrt{50}) = 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{100 - 50} = 2 \cdot 50 = 100$

$x = -\sqrt{50} \to f(-\sqrt{50}) = 2 \cdot (-\sqrt{50}) \cdot \sqrt{100 - 50} = -2 \cdot 50 = -100$

Los puntos son $(-\sqrt{50}, -100)$ y $(\sqrt{50}, 100)$.

4. Ecuaciones de las rectas tangentes a una función en varios puntos

Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes de la siguiente función en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 3$:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{e^x}$$

$f(0) = 1$

$f(3) = \dfrac{4}{e^3}$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)\,e^x - (x-1)^2\,e^x}{e^{2x}} = \frac{2(x-1) - (x-1)^2}{e^x} = \frac{2x - 2 - x^2 + 2x - 1}{e^x} = \frac{-x^2 + 4x - 3}{e^x}$$

$f'(0) = -3$

$f'(3) = 0$

En $x = 0$ la recta tangente es $y = 1 - 3x$.

En $x = 3$ la recta tangente es $y = \dfrac{4}{e^3}$.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 168

Para practicar

Definición de derivada

1 **Halla la tasa de variación media (T.V.M.) o cociente incremental de las siguientes funciones en los intervalos: [–3, –1]; [0, 2]; [2, 5]; [1, 1 + h].**

a) $f(x) = x^2 + 1$ **b)** $f(x) = 7x - 5$ **c)** $f(x) = 3$ **d)** $f(x) = 2^x$

¿En cuáles de ellas es constante la T.V.M.? ¿Qué tipo de funciones son?

a) $f(x) = x^2 + 1$

En $[-3, -1]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = -4$

En $[0, 2]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 2$

En $[2, 5]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En $[1, 1 + h]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$

b) $f(x) = 7x - 5$

En $[-3, -1]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 7$

En $[0, 2]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 7$

En $[2, 5]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En $[1, 1 + h]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{7h}{h} = 7$

c) $f(x) = 3$

En $[-3, -1]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 0$

En $[0, 2]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 0$

En $[2, 5]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 0$

En $[1, 1 + h]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$

d) $f(x) = 2^x$

En $[-3, -1]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = \dfrac{3}{16}$

En $[0, 2]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = \dfrac{3}{2}$

En $[2, 5]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = \dfrac{28}{3}$

En $[1, 1 + h]$ → T.V.M. $= \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{2^{1+h} - 2}{h} = \dfrac{2(2^h - 1)}{h}$

La función b) $f(x) = 7x - 5$ es una función lineal y la T.V.M. es constante.

La función c) $f(x) = 3$ es una función lineal y la T.V.M. es 0 (constante).

2 **Halla con calculadora el cociente incremental $\frac{\Delta f}{h}$ para $x_0 = 2$ y $h = 0,1$ de:**

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

Compara resultados con las derivadas de estas funciones en el punto de abscisa 2.

a) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(2,1) - f(2)}{0,1} = \frac{\sqrt{2,1} - \sqrt{2}}{0,1} = 0,349$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,354$

b) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(2,1) - f(2)}{0,1} = \frac{2,1^2 - 5 \cdot 2,1 + 1 - (-5)}{0,1} = -0,9$

$f'(x) = 2x - 5 \to f'(2) = 2 \cdot 2 - 5 = -1$

c) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(2,1) - f(2)}{0,1} = \frac{\frac{1}{2,1} - \frac{1}{2}}{0,1} = -0,238$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \to f'(2) = \frac{-1}{2^2} = -0,25$

3 **Halla con calculadora el cociente incremental $\frac{\Delta f}{h}$ para $x_0 = \pi/3$ y $h = 0,01$ de:**

a) $f(x) = sen\, x$

b) $f(x) = cos\, x$

c) $f(x) = tg\, x$

Compara resultados con las derivadas de estas funciones en el punto de abscisa $\pi/3$.

a) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + 0,01\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{0,01} = \frac{sen\left(\frac{\pi}{3} + 0,01\right) - sen\frac{\pi}{3}}{0,01} = 0,496$

$f'(x) = cos\, x \to f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\frac{\pi}{3} = 0,5$

b) $\frac{\Delta f}{h} = = \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + 0,01\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{0,01} = \frac{cos\left(\frac{\pi}{3} + 0,01\right) - cos\frac{\pi}{3}}{0,01} = -0,869$

$f'(x) = -sen\, x \to f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -sen\frac{\pi}{3} = -0,866$

c) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{f\left(\frac{\pi}{3} + 0,01\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{0,01} = \frac{tg\left(\frac{\pi}{3} + 0,01\right) - tg\frac{\pi}{3}}{0,01} = 4,07$

$f'(x) = \frac{1}{cos^2 x} \to f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{cos^2\frac{\pi}{3}} = 4,0$

4 **El límite** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{sen\,(\pi + h) - sen\,\pi}{h}$ **es la derivada de la función *seno* en el punto de abscisa** π**, es decir,** $sen'(\pi)$**. Por tanto, el límite es:**

$$sen'(\pi) = cos\,(\pi) = -1$$

Calcula análogamente, es decir, a partir de las reglas de derivación que ya conoces, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$ **b)** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{2+h} - e^2}{h}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x^2 - 3x + 1) - 1}{x - 3}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 64}{x - 4}$

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$ b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{2+h} - e^2}{h} = e^2$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x^2 - 3x + 1) - 1}{x - 3} = 2 \cdot 3 - 3 = 3$ d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 64}{x - 4} = 3 \cdot 4^2 = 48$

5 **Utiliza la definición de derivada para hallar:**

a) $f'(3)$ **en cada caso:**

$f(x) = \dfrac{3x - 2}{7}$ $f(x) = x^2 - 4$ $f(x) = \dfrac{2 + x}{x}$

b) $f'(2)$ **en cada caso:**

$f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ $f(x) = \sqrt{x + 2}$ $f(x) = (x - 5)^2$

a) • $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3h/7)}{h} = \dfrac{3}{7}$

• $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 6h}{h} = 6$

• $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{9h + 3h^2} = \dfrac{-2}{9}$

b) • $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2}{3h + 9} = \dfrac{2}{9}$

• $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \dfrac{1}{4}$

• $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h - 6) = -6$

6 **Aplica la definición de derivada para hallar** $f'(x)$**.**

a) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{2}$ **b)** $f(x) = 3x^2 - 1$ **c)** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ **e)** $f(x) = x^2 - x$ **f)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{5(x+h) + 1}{2} - \dfrac{5x + 1}{2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{5h}{2}}{h} = \dfrac{5}{2}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[3(x+h)^2 - 1] - (3x^2 - 1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h^2 + 6xh}{h} = 6x$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x + h + \dfrac{1}{x+h} - x - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2 + hx - 1}{x(h+x)} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+h-2} - \dfrac{1}{x-2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{(x-2)\cdot(x+h-2)\cdot h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{(x-2)\cdot(x+h-2)} = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$

e) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[(x+h)^2 - (x+h)] - (x^2 - x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2xh - h}{h} = 2x - 1$

f) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{(x+h)^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{(x+h)^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}\right)\left(\sqrt{(x+h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}\right)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h\left(\sqrt{(x+h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}\right)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2xh + h^2}{h\left(\sqrt{(x+h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}\right)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x + h}{\sqrt{(x+h)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Reglas de derivación

7 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$ **b)** $\dfrac{x + 1}{(2 - x)^2}$ **c)** $y = \dfrac{3x^2}{x + \sqrt{x}}$

d) $y = \left(0{,}5 - \dfrac{x}{10}\right)^4$ **e)** $y = \sqrt[3]{3x^2}$ **f)** $y = (2\sqrt{x} - 3)^7$

a) $y' = \dfrac{2x\cdot(x^2 + 3) - (x^2 - 3)\cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \dfrac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

b) $y' = \dfrac{(2 - x)^2 + (x + 1)\cdot 2(2 - x)}{(2 - x)^4} = \dfrac{x + 4}{(2 - x)^3}$

c) $y' = \dfrac{6x\cdot(x + \sqrt{x}) - 3x^2\cdot\left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x + \sqrt{x})^2} = \dfrac{15x^2 + 6x^2\cdot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot(x + \sqrt{x})^2}$

d) $y' = \dfrac{-4}{10}\cdot\left(0{,}5 - \dfrac{x}{10}\right)^3 = \dfrac{-2}{5}\cdot\left(0{,}5 - \dfrac{x}{10}\right)^3$

e) $y' = D\left(\sqrt[3]{3}\, x^{2/3}\right) = \sqrt[3]{3}\cdot\dfrac{2}{3}\, x^{-1/3} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{x}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{9x}}$

f) $y' = 7(2\sqrt{x} - 3)^6\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{x}}(2\sqrt{x} - 3)^6$

8 Halla la derivada de estas funciones:

a) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

b) $y = \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^3$

c) $y = \dfrac{x}{(2x+1)^3}$

d) $y = \dfrac{1-x^2}{x^2-4x+4}$

e) $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{2/3}$

f) $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{2}$

a) $y' = \dfrac{3x^2 \cdot (x+1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{x^2 \cdot (x+3)}{(x+1)^3}$

b) $y' = 3 \cdot \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2} = 3 \cdot \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{x^2-1}{x^2}$

c) $y' = \dfrac{(2x+1)^3 - x \cdot 3\,(2x+1)^2}{(2x+1)^6} = \dfrac{(2x+1)-6x}{(2x+1)^4} = \dfrac{1-4x}{(2x+1)^4}$

d) $y' = \dfrac{-2x(x^2-4x+4)-(1-x^2)\,(2x-4)}{(x^2-4x+4)^2} = \dfrac{-2x(x-2)^2-(1-x^2)\cdot 2\,(x-2)}{(x-2)^4} =$

$= \dfrac{-2x(x-2)-(1-x^2)\cdot 2}{(x-2)^3} = \dfrac{4x-2}{(x-2)^3}$

e) $y' = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1\cdot(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} =$

$= \dfrac{2}{3}\,\dfrac{-2}{(1-x)^{1/3}\cdot(1+x)^{5/3}} = \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(1-x)\,(1+x)^5}}$

f) $y' = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{2} \cdot 2x = -\dfrac{2}{x^2} + x$

9 Deriva las funciones siguientes:

a) $y = e^{4x}\,(x-1)$

b) $y = \dfrac{(1-x)^2}{e^x}$

c) $y = \sqrt{2^x}$

d) $y = \ln\,(2x-1)$

e) $y = \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

f) $y = 7e^{-x}$

a) $y' = 4 \cdot e^{4x} \cdot (x-1) + e^{4x} \cdot 1 = e^{4x} \cdot (4x-3)$

b) $y' = \dfrac{-2\cdot(1-x)\cdot e^x - (1-x)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{-2\cdot(1-x)-(1-x)^2}{e^x} = \dfrac{-x^2+4x-3}{e^x}$

c) $y' = \dfrac{2^x \cdot \ln 2}{2\sqrt{2^x}} = \dfrac{2^{x-1}\cdot \ln 2}{\sqrt{2^x}}$

d) $y' = \dfrac{2}{2x-1}$

e) $y' = \dfrac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2} = \dfrac{3^{2x}+e^{-2x}-2-e^{2x}-e^{-2x}-2}{(e^x-e^{-x})^2} = \dfrac{-4}{(e^x-e^{-x})^2}$

f) $y' = -7e^{-x}$

10 **Deriva estas funciones:**

a) $y = \ln(x^2 - 1)$

b) $y = \ln\sqrt{1-x}$

c) $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$

d) $y = e^{x^2+1}$

e) $y = \ln\left(tg\,\dfrac{3}{x}\right)$

f) $y = \ln\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$

b) $y' = \dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{-1}{2(1-x)}$

c) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot e^x - \ln x\cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \ln x}{e^x} = \dfrac{1 - x\cdot\ln x}{x\cdot e^x}$

d) $y' = 2xe^{x^2+1}$

e) $y' = \dfrac{1}{tg\,\dfrac{3}{x}}\cdot\left(1 + tg^2\,\dfrac{3}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{x^2}\right) = -\dfrac{3\left(1+tg^2\,\dfrac{3}{x}\right)}{x^2\,tg\,\dfrac{3}{x}}$

f) $y' = \dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x\ln\dfrac{1}{x}}$

11 **Calcula la derivada de estas funciones:**

a) $y = sen^2\,x$

b) $y = sen\,x^2$

c) $y = sen\,x\cos^2 x$

d) $y = \dfrac{sen^2\,x}{1+\cos^2 x}$

e) $y = sen^2\,x^2$

f) $y = \cos^3(2x+1)$

a) $y' = 2sen\,x\cdot\cos x = sen\,2x$

b) $y' = \cos x^2\cdot 2x = 2x\cos x^2$

c) $y' = \cos x\cdot\cos^2 x - 2\cos x\cdot sen\,x\cdot sen\,x = \cos^3 x - 2sen^2\,x\cos x =$

$= \cos^3 x - 2(1-\cos^2 x)\cos x = \cos^3 x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 3\cos^3 x - 2\cos x$

d) $y' = \dfrac{2sen\,x\cos x\cdot(1+\cos^2 x) + 2\cos x\,sen\,x\cdot sen^2\,x}{(1+\cos^2 x)^2} =$

$= \dfrac{2sen\,x\cos x + 2sen\,x\cos^3 x + 2\cos x\,sen^3\,x}{(1+\cos^2 x)^2} =$

$= \dfrac{2sen\,x\cos x\cdot(1+\cos^2 x + sen^2\,x)}{(1+\cos^2 x)^2} = \dfrac{4sen\,x\cos x}{(1+\cos^2 x)^2}$

e) $y' = 2sen\,x^2\cdot\cos x^2\cdot 2x = 4x\,sen\,x^2\cos x^2$

f) $y' = 3\cos^2(2x+1)\cdot[-sen(2x+1)\cdot 2] = -6sen(2x+1)\cos^2(2x+1)$

12 **Deriva las funciones siguientes:**

a) $y = cos^5 (7x^2)$ **b)** $y = tg\, \frac{x^2}{2}$ **c)** $y = log_2 \frac{1}{x}$

d) $y = \sqrt[3]{sen\, x^2}$ **e)** $y = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ **f)** $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

a) $y' = 5\ cos^4 (7x^2) \cdot (-sen\, (7x^2)) \cdot 14x = -70x\ cos^4 (7x^2)\ sen\, (7x^2)$

b) $y' = \left(1 + tg^2 \frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{2x}{2} = x + x\, tg^2 \frac{x^2}{2}$

c) $y = log_2 1 - log_2 x$

$y' = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\, 2} = \frac{-1}{x\, ln\, 2}$

d) $y' = \frac{2x \cdot cos\, x^2}{3\sqrt[3]{sen^2\, x^2}}$

e) $$y' = \frac{\frac{2 \cdot (1-2x) + (1+2x) \cdot 2}{(1-2x)^2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{\frac{4}{(1-2x)^2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{2}{(1-2x)^2 \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1-2x)^4 \cdot \frac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{2}{\sqrt{(1-2x)^3 (1+2x)}}$$

f) $$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$$

13 **Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:**

a) $y = ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ **b)** $y = ln\, (x\, tg\, x)^2$ **c)** $y = ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right)$

d) $y = ln\, (2^x \cdot sen^2\, x)$ **e)** $y = ln \sqrt{\frac{x}{x+1}}$ **f)** $y = ln\, (sen \sqrt{e^x})$

a) $y = ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}[ln\, (1-x) - ln\, (1+x)]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-1-x-1+x}{1-x^2}\right] = \frac{-1}{1-x^2}$$

b) $y = ln\, (x\, tg\, x)^2 = 2[ln\, x + ln\, (tg\, x)]$

$$y' = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1+tg^2\, x}{tg\, x}\right] = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{2}{tg\, x} + tg\, x\right] = \frac{2}{x} + 2\, cotg\, x + 2tg\, x$$

c) $$y = ln\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right) = ln \sqrt[3]{x^2-1} - ln\, x^2 = \frac{1}{3}\, ln\, (x^2-1) - 2ln\, x$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{(x^2-1)} - 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2x}{3\,(x^2-1)} - \frac{2}{x}$$

d) $y = \ln(2^x \, sen^2\, x) = \ln 2^x + \ln(sen^2\, x) = x \ln 2 + 2 \ln(sen\, x)$

$$y' = \ln 2 + 2 \cdot \frac{\cos x}{sen\, x} = \ln 2 + \frac{2}{tg\, x}$$

e) $y = \frac{1}{2} \cdot (\ln x - \ln(x+1))$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2x^2 + 2x}$$

f) $y = \ln(sen\, e^{x/2})$

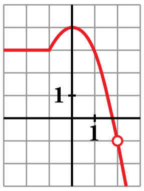
$$y' = \frac{\frac{1}{2} e^{x/2} \cdot \cos e^{x/2}}{sen\, e^{x/2}} = \frac{e^{x/2} \cdot \cos \sqrt{e^x}}{2 sen \sqrt{e^x}}$$

Página 169

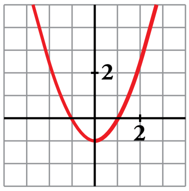
Derivabilidad

14 Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables:

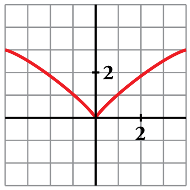
a)



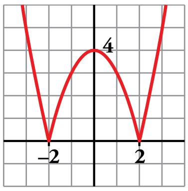
b)



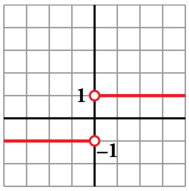
c)



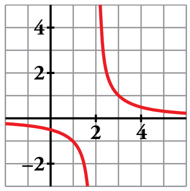
d)



e)



f)



¿Alguna de ellas es derivable en todo $\mathbb{R}$?

a) No es derivable en $x = -1$ (tiene un punto "anguloso"), ni en $x = 2$ (no está definida la función).

b) Es derivable en todo $\mathbb{R}$.

c) No es derivable en $x = 0$ (tiene un punto "anguloso").

d) La función no es derivable ni en $x = -2$ ni en $x = 2$ porque en estos valores tiene puntos angulosos.

e) La función no es derivable en $x = 0$ porque no está definida en ese punto.

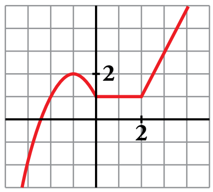
f) La función no es derivable en $x = 2$ porque no está definida en ese punto.

La única función derivable en todo $\mathbb{R}$ es la del apartado b).

15 Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$. Calcula, observándola:

$f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(3)$.

¿En qué puntos no es derivable?



- En $x = -1$, la recta tangente a f es horizontal; su pendiente es 0. Por tanto, $f'(-1) = 0$.
- En $x = 1$, f es una función constante. Luego $f'(1) = 0$.
- En $x = 3$, f es una recta que pasa por los puntos (2, 1) y (4, 5). Calculamos su pendiente:

$$m = \frac{5-1}{4-2} = 2. \text{ Por tanto, } f'(3) = 2.$$

- No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$, ya que en ellos observamos que $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ y $f'(2^-) \neq f'(2^+)$.

16 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican y represéntalas:**

a) $f(x)=\begin{cases}3x-1 & \text{si } x<1\\ x^2+x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ **en** $x=1$

b) $f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{si } x<0\\ x^2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ **en** $x=0$

c) $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x<3\\ x^2-4 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$ **en** $x=3$

d) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & \text{si } x\leq 2\\ 3x+1 & \text{si } x>2\end{cases}$ **en** $x=2$

a) Continuidad en $x=1$:

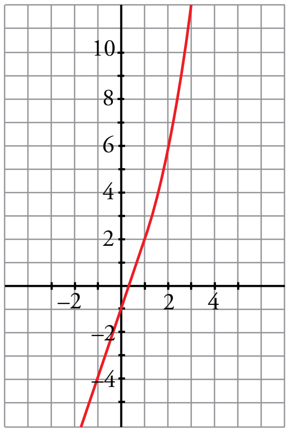
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x-1)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+x)=2\\ f(1)=2\end{array}\right\}\ f(x) \text{ es continua en } x=1.$$

Derivabilidad en $x=1$:

$$f'(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x<1\\ 2x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(1^-)=3\\ f'(1^+)=3\end{array}\right\}\ f(x) \text{ es derivable en } x=1 \text{ y } f'(1)=3.$$

Gráfica:



b) Continuidad en $x=0$:

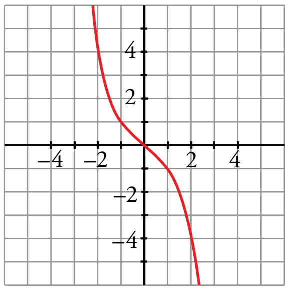
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-x^2=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0\\ f(0)=0\end{array}\right\}\ f(x) \text{ es continua en } x=0.$$

Derivabilidad en $x=0$:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si } x<0\\ 2x & \text{si } x>0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=0\\ f'(0^+)=0\end{array}\right\}\ f(x) \text{ es derivable en } x=0 \text{ y } f'(0)=0.$$

Gráfica:



c) Continuidad en $x=3$:

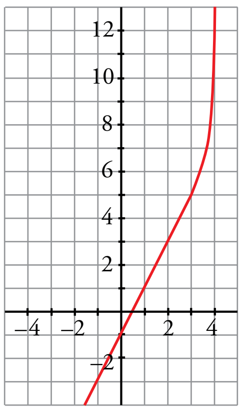
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-1)=5\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2-4)=5\\ f(3)=5\end{array}\right\}\ f(x) \text{ es continua en } x=3.$$

Derivabilidad en $x=3$:

$$f'(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x<3\\ 2x & \text{si } x>3\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(3^-)=2\\ f'(3^+)=6\end{array}\right\}\ f(x) \text{ no es derivable en } x=3.$$

Gráfica:



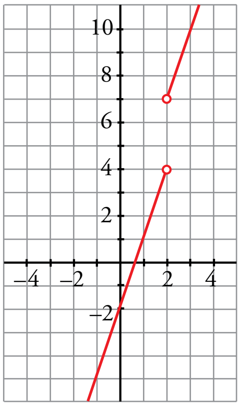
d) Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3x + 1) = 7 \end{array}\right\} f(x) \text{ no es continua en } x = 2$$ (tiene una discontinuidad de salto finito).

Derivabilidad en $x = 2$:

Como $f(x)$ no es continua en $x = 2$, tampoco es derivable en ese punto.

Gráfica:



17 **Comprueba que la función $f(x)$ es continua pero no es derivable en $x = 2$:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

- Si $x \neq 2$, la función es continua y derivable.
- Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \ln(x-1) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x - 6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

- Derivabilidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-1} = 1 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 = 3 = f'(2^+) \end{array}\right\} \text{Las derivadas laterales existen pero no coinciden.}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

18 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$, la función es continua y derivable.

Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\}$$ Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden. La función no es continua en $x = 3$.

Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen pero no coinciden, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Derivabilidad en $x = 3$:

Como $f(x)$ no es continua en $x = 3$, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

b) Si $x \neq -1$ y $x \neq 2$, $f(x)$ es continua y derivable.

Continuidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\}$$ $f(x)$ es continua en $x = -1$.

Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x + 2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 12 \end{array}\right\}$$ Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden, $f(x)$ no es continua en $x = 2$.

Derivabilidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} 2 = 2 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen pero no coinciden, $f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

Derivabilidad en $x = 2$:

$f(x)$ no es continua en $x = 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

19 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de las funciones:**

a) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}}$

a) Continuidad:

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$ Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

• En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x = 1) \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \;\to$$

La función es continua en $x = 1$ y, por tanto,es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

• Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ $\to$ La función es derivable. Su derivada es, en esos puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

• En $x = 0$:

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$; y $f'(0) = 0$.

• En $x = 1$:

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Continuidad:

• En $x \neq 0$ $\to$ La función es continua, pues está formada por dos funciones continuas.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \;\to$$

La función es continua en $x = 0$ y, por tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

• Si $x \neq 0$ $\to$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• En $x = 0$:

$f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = -1$. La función es derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

20 **a) Calcula los valores de m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

a) Para que sea derivable, en primer lugar ha de ser continua.

• Si $x \neq 1$, la función es continua, pues está formada por dos polinomios.

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $-4 + m = -1 + n$; es decir: $m = n + 3$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 1$, la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable en $x = 1$, ha de ser $-3 = -2 + n$, es decir, $n = -1$.

Por tanto, la función será derivable en todo $\mathbb{R}$ si $m = 2$ y $n = -1$. En este caso, la derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $f'(x) = 2x - 5$ si $x < 1$

$$2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}; \text{ pero } \frac{5}{2} > 1$$

$f'(x) = -2x - 1$ si $x \geq 1$

$$-2x - 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}; \text{ pero } -\frac{1}{2} < 1$$

Por tanto, $f'(x)$ no se anula en ningún punto.

21 Calcula a y b para que las siguientes funciones sean derivables en todo $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- Si $x \neq 2 \rightarrow$ la función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- En $x = 2$ debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4a + 6 = -2b$; es decir, $2a + 3 = -b$ o bien $b = -2a - 3$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 2 \rightarrow$ la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- En $x = 2$ debe cumplirse que $f'(2^-) = f'(2^+)$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable, ha de ser $4a + 3 = 4 - b$; es decir, $b = -4a + 1$.

Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \ \to\ 2a = 4 \ \to\ a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

Por tanto, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ y $b = -7$.

b) Continuidad:

- En $x \neq 0$ $\to$ La función es continua pues está formada por dos polinomios.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua ha de ser $b = 0$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 0$ $\to$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable, ha de ser $a = -1$.

Por tanto, $f(x)$ será continua y derivable si $a = -1$ y $b = 0$.

22 **Prueba que la función $f(x) = |x + 1|$ no es derivable en $x = -1$.**

$$f(x) = |x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ x + 1 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$$

$f(x)$ es una función continua, pues está formada por dos funciones continuas, si $x \neq -1$.

- En $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (-x - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x + 1) = b \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\} f \text{ es continua en } x = -1.$$

- Su derivada, si $x \neq -1$, es:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Las derivadas laterales en $x = -1$ son:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^+) = 1 \\ f'(-1^-) = -1 \end{array}\right\} \text{No coinciden; por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = -1.$$

23 **Di si es derivable cada una de las funciones siguientes en los puntos que se indican.**

Calcula en dichos puntos las derivadas laterales.

a) $f(x) = |x|$ **en** $x_0 = 0$

b) $f(x) = |x^2 - x - 6|$ **en** $x_0 = -2$ **y** $x_1 = 3$

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Estudiamos primero la continuidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \ \to \text{ Es continua.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \ \to \ f'(0^-) = -1 \\ 1 & \text{si } x > 0 \ \to \ f'(0^+) = 1 \end{cases}$$

$f'(0^-) \neq f'(0^+) \ \to$ No es derivable en $x_0 = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + x + 6 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

La función es continua en $\mathbb{R}$ por ser el valor absoluto de una función polinómica.

Calculamos las derivadas laterales en cada punto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < -2 \\ -2x + 1 & \text{si } -2 < x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -5 \\ f'(-2^+) = 5 \end{array}\right\} \to f'(-2^-) \neq f'(-2^+) \ \to \text{ No es derivable en } x_0 = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -5 \\ f'(3^+) = 5 \end{array}\right\} \to f'(3^-) \neq f'(3^+) \ \to \text{ No es derivable en } x_1 = 3.$$

24 **Indica en qué puntos no son derivables las siguientes funciones:**

a) $f(x) = |x^2 - 4|$

b) $f(x) = |2x - 3|$

a) $f(x) = |x^2 - 4|$

$f(x)$ es una función continua, pues es la composición de funciones continuas. La definimos a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Si $x \neq -2$ y $x \neq 2$, $f'(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$: Hallamos las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -4 \\ f'(-2^+) = 4 \end{array}\right\} f(x) \text{ no es derivable en } x = -2.$$

En $x = 2$: Hallamos las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -4 \\ f'(2^+) = 4 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ no es derivable en } x = 2.$$

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

b) $f(x) = |2x - 3| = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 3/2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 3/2 \end{cases}$

$f(x)$ es una función continua pues es la composición de dos funciones continuas ($y = 2x - 3$ e $y = |x|$).

En $x \neq \dfrac{3}{2}$, $f(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 3/2 \\ 2 & \text{si } x \geq 3/2 \end{cases}$$

En $x = \dfrac{3}{2}$, f no es derivable porque $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)^- = -2$ y $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)^+ = 2$.

25 **¿Cuántos puntos que no tengan derivada hay en la función $y = |x^2 - 6x - 8|$?**

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \to x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \leq x \leq -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

La función es continua, pues es el valor absoluto de una función continua.

En $x = -4 \to y'(-4^-) = -2 \neq y'(-4^+) = 2$

En $x = -2 \to y'(-2^-) = -2 \neq y'(-2^+) = 2$

La función no es derivable ni en $x = -4$ ni en $x = -2$; es decir, en $(-4, 0)$ y en $(-2, 0)$.

Son dos puntos "angulosos".

26 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $y = |x - 2|$

b) $y = |x^2 + 6x + 8|$

c) $y = x + |x - 3|$

d) $y = x^2 + |x|$

a) Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -1 \\ f'(2^+) = 1 \end{array}\right\} \; f'(2^-) \neq f'(2^+) \to \text{No existe } f'(2)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b) Definimos la función por intervalos. Para ello, calculamos los puntos en los que $y = 0$:

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -4 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \le x \le -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Derivamos:

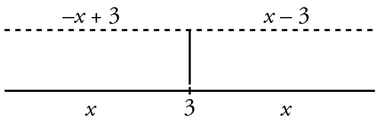
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4^-) = 2(-4) + 6 = -2 \\ f'(-4^+) = -2(-4) - 6 = 2 \end{array}\right\} f'(-4^-) \ne f'(-4^+) \rightarrow \text{No existe } f'(-4)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -2(-2) - 6 = -2 \\ f'(-2^+) = -2(-2) + 6 = 2 \end{array}\right\} f'(-2^-) \ne f'(-2^+) \rightarrow \text{No existe } f'(-2)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$.

c) Analizamos el signo de $x - 3$ para definir la función por intervalos:



$$x + (-x + 3) = 3$$
$$x + x - 3 = 2x - 3$$

Así:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 0 \\ f'(3^+) = 2 \end{array}\right\} f'(3^-) \ne f'(3^+) \rightarrow \text{No existe } f'(3)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$.

d) Definimos la función por intervalos.

Recordamos que $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$.

Así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\ f'(0^+) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{array}\right\} f'(0^-) \ne f'(0^+) \rightarrow \text{No existe } f'(0)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

27 **a) Comprueba que la siguiente función es derivable y halla $f'(0)$, $f'(3)$ y $f'(1)$:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x<1 \\ x^2+x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es su función derivada?

c) ¿En qué punto se cumple que $f'(x) = 5$?

d) ¿Hay algún punto en el que $f'(x) = -1$?

a) Si $x \neq 1$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

Continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3x-1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2+x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x+1) = 3 = f'(1^+) \end{array}\right\} \text{Las derivadas laterales existen y coinciden.}$$

Luego $f(x)$ es derivable en $x = 1$. Además, $f'(1) = 3$.

Así, $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 3$

$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

b) $f'(x) = \begin{cases} 3 & x<1 \\ 2x+1 & x \ge 1 \end{cases}$

c) Si $f'(x) = 5$, entonces $x \ge 1$. Es decir:

$f'(x) = 2x + 1 = 5 \rightarrow x = \dfrac{4}{2} = 2 > 1$

$f'(2) = 5$

d) $f'(x) = -1 \rightarrow 2x + 1 = -1 \rightarrow x = -1$ (no es válido porque no pertenece al intervalo de definición).

No hay ningún punto en el que la derivada sea –1.

Página 170

Para resolver

28 **Calcula el valor de la derivada en $x = 0$ de cada una de las siguientes funciones:**

a) $g(x) = e^{sen\, f(x)}$ si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$

b) $h(x) = [sen\, f(x)]^3$ si $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ y $f'(0) = 1$

c) $j(x) = \sqrt{ln\, f(x)}$ si $f(0) = e$ y $f'(0) = 1$

a) Aplicamos la regla de la cadena:

$g'(x) = D[sen\, f(x)] \cdot e^{sen\, f(x)} = f'(x) \cdot cos\, f(x) \cdot e^{sen\, f(x)}$

$g'(0) = f'(0) \cdot cos\, f(0) \cdot e^{sen\, f(0)} = 1 \cdot cos\, 0 \cdot e^{sen\, f(0)} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

b) Aplicamos la regla de la cadena:

$$h'(x) = 3[sen\ f(x)]^2 \cdot D[sen\ f(x)] = 3[sen\ f(x)]^2 \cdot f'(x)\ cos\, f(x)$$

$$h'(0) = 3[sen\ f(0)]^2 \cdot f'(0) \cdot cos\, f(0) = 3\left[sen\ \frac{\pi}{4}\right]^2 \cdot 1 \cdot cos\ \frac{\pi}{4} = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

c) Aplicamos la regla de la cadena:

$$j'(x) = \frac{D[ln\ f(x)]}{2\sqrt{ln\ f(x)}} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{ln\ f(x)}}$$

$$j'(0) = \frac{f'(0)}{2f(0)\sqrt{ln\ f(0)}} = \frac{1}{2e\sqrt{ln\ e}} = \frac{1}{2e\sqrt{1}} = \frac{1}{2e}$$

29 **Considera las siguientes funciones polinómicas:**

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = 3x + 1$$

Calcula:

a) $(f \circ g)'(x)$

b) $(g \circ f)'(x)$

c) $f \circ g'(x)$

d) $f' \circ g(x)$

a) $(f \circ g)'(x) = f'[g(x)]\, g'(x)$

Como $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 1 \rightarrow f'(x) = 2x,\ g'(x) = 3$

$(f \circ g)'(x) = 2 \cdot (3x + 1) \cdot 3 = 6(3x + 1) = 18x + 6$

También podemos hacer:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x + 1) = (3x + 1)^2$

$(f \circ g)'(x) = 2 \cdot 3(3x + 1) = 18x + 6$

b) $(g \circ f)'(x) = g'[f(x)]\, f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$

O bien:

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 3x^2 + 1 \rightarrow (g \circ f)'(x) = 6x$

c) $(f \circ g')(x) = f[g'(x)] = f(3) = 9$

d) $(f' \circ g)(x) = 2 \cdot g(x) = 6x + 2$, ya que $f'(x) = 2x$.

30 **Sean f y g dos funciones tales que $f(x) = x^2 + 1$ y $g'(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y $g(0) = 4$. Calcula:**

a) $(f \circ g)'(0)$

b) $(g \circ f)'(0)$

c) $(g^{-1})'(4)$

d) $(f^{-1})'(5)$

a) $(f \circ g)'(0) = f'[g(0)] \cdot g'(0) = 2 \cdot g(0) \cdot g'(0) = 2 \cdot 4 \cdot cos\ 0 = 8$

b) $(g \circ f)'(0) = g'[f(0)] \cdot f'(0) = g'(1) \cdot 2 \cdot 0 = 0$

c) $(g^{-1})'(4) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(4))} = \dfrac{1}{g'(0)} = \dfrac{1}{cos\ 0} = 1$

d) Para que f sea inyectiva y se pueda determinar la función recíproca, supondremos que $x > 0$.

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

31 Considera las siguientes funciones:

$$f(x) = (x+1)^2 \qquad g(x) = x^2$$

a) Calcula:

$$f'(x^2) \qquad (f \circ g)'(x) \qquad g'[f(x)] \qquad (g \circ f)'(x)$$

b) Si h es una función cualquiera, halla, en función de h' y de h, las derivadas de:

$$f[h(x)] \qquad f[x + h(x)] \qquad g[f(x + h(x))]$$

a) $f'(x) = 2(x+1)$, $g'(x) = 2x$

$f'(x^2) = 2(x^2+1)$

$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'(x^2) \cdot g'(x) = 2(x^2+1) \cdot 2x = 4x(x^2+1)$

$g'[f(x)] = g'[(x+1)^2] = 2(x+1)^2$

$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = 2(x+1)^2 \cdot 2(x+1) = 4(x+1)^3$

b) $f[h(x)]' = f'[h(x)] \cdot h'(x) = 2[h(x)+1] \cdot h'(x)$

$f[x+h(x)]' = f'[x+h(x)] \cdot [1+h'(x)] = 2[x+h(x)+1] \cdot [1+h'(x)]$

$g[f[x+h(x)]]' = g'[f[x+h(x)]] \cdot (f[x+h(x)])'[1+h'(x)] =$

$= g'[(x+h(x)+1)^2] \cdot (f[x+h(x)])'[1+h'(x)] =$

$= 2(x+h(x)+1)^2 \cdot 2[x+h(x)+1] \cdot [1+h'(x)] =$

$= 4(x+h(x)+1)^3 \cdot [1+h'(x)]$

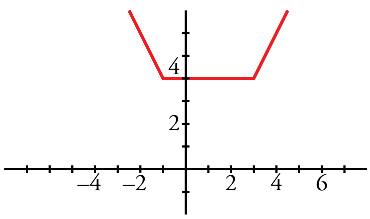
32 a) Representa la función $f(x) = |x+1| + |x-3|$.

Observando la gráfica, di en qué puntos no es derivable.

b) Representa $f'(x)$.

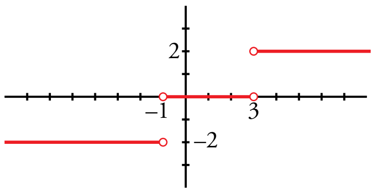
* ***Ayúdate de la resolución del Ejercicio resuelto 5.***

a) $f(x) = \begin{cases} -x-1-x+3 & \text{si } x < -1 \\ x+1-x+3 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ x+1+x-3 & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 2x-2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



No es derivable ni en $x = -1$ ni en $x = 3$. (Son puntos “angulosos”).

b) $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



33 **Dada la función $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$**

a) Halla $f'(x)$.

b) Halla $f''(x)$.

Representa gráficamente los resultados.

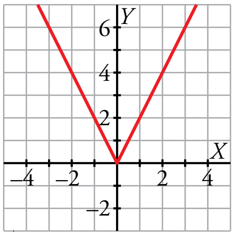
a) La función dada es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Claramente las derivadas laterales coinciden en $x = 0$.

Por tanto, es derivable y $f'(0) = 0$.

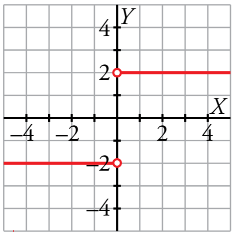
Gráfica de $f'(x)$:



b) Como se puede ver en la gráfica anterior, $f'(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Claramente las derivadas laterales no coinciden en $x = 0$. Por tanto, no existe $f''(0)$.



34 **Las siguientes funciones tienen algún punto donde la derivada no existe. Hállalos en cada caso:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $f(x) = |x - 3|$

e) $f(x) = \left| \dfrac{4x - 5}{2} \right|$

f) $f(x) = |x^2 - 2x|$

a) $f(x) = x^{2/3}$; $Dom\, f = \mathbb{R} \to f'(x) = \dfrac{2}{3} x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x)$ no existe si $x = 0$; es decir, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$f'(x)$ no existe si $x = -2$; el dominio de $f(x)$ es $[-2, +\infty)$.

Por tanto, en los puntos en los que la función está definida, no es derivable en $x = -2$.

c) El dominio de la función es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

En los puntos en los que $f(x)$ está definida, no es derivable en $x = -1$, ni en $x = 1$.

d) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 3 \\ x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; pero no es derivable en $x = 3$, pues sus derivadas laterales no coinciden.

$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -1 \\ f'(3^+) = 1 \end{array}\right\}$ Son distintas.

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4x+5}{2} & \text{si } x < \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{4x-5}{2} & \text{si } x \geq \dfrac{5}{4} \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 5/4 \\ 2 & \text{si } x > 5/4 \end{cases}$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; pero no es derivable en $x = \dfrac{5}{4}$, pues sus derivadas laterales no coinciden.

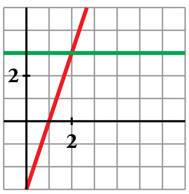
$\left.\begin{array}{l} f'(5/4^-) = -2 \\ f'(5/4^+) = 2 \end{array}\right\}$ Son distintas.

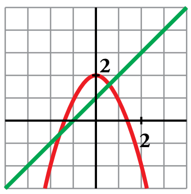
f) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } x < 0 \\ -x^2+2x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2-2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x < 0 \\ -2x+2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2x-2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

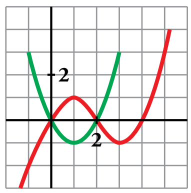
$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; pero no es derivable en $x = 0$, ni en $x = 2$, pues sus derivadas laterales no coinciden:

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -2 \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right\}$ Son distintas. $\qquad \left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -2 \\ f'(2^+) = 2 \end{array}\right\}$ Son distintas.

35 **¿Cuál de los siguientes apartados representa la gráfica de una función f y la de su derivada f'? Justifica tu respuesta.**

a)


b)


c)


a) La función en rojo es una recta que tiene pendiente 3. Por tanto, su derivada es $y = 3$ (la recta verde).

Luego estas gráficas sí representan a una función y su derivada.

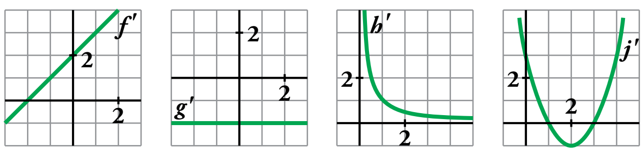
b) La función en rojo es un polinomio de 2.º grado, una parábola. Su derivada es una recta. En $x = 0$, la función tiene un máximo; la derivada se anula. Para que la recta fuera la derivada, tendría que pasar por (0, 0).

No representan, por tanto, a una función y su derivada.

c) La función tiene que ser un polinomio de 3.^{er} grado porque tiene dos extremos relativos. Su derivada será un polinomio de 2.º grado, una parábola. En $x = 1$, la función tiene un máximo; la derivada se anula, $f'(1) = 0$, y tendría que pasar por (1, 0).

Estas tampoco representan a una función y su derivada.

36 **Estas gráficas son las funciones derivadas de *f*, *g*, *h* y *j*:**



a) ¿Cuáles de esas funciones (*f*, *g*, *h* y *j*) tienen puntos de tangente horizontal?

b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?

c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

d) ¿Alguna puede ser polinómica de tercer grado?

e) ¿Alguna de las funciones puede ser $y = ln\, x$?

a) Los puntos de tangente horizontal son los puntos en los que se anula la derivada.

f tiene un punto de tangente horizontal en $x = -2$, pues $f'(-2) = 0$.

j tiene dos puntos de tangente horizontal en $x = 1$ y en $x = 3$, pues $j'(1) = j'(3) = 0$.

g y h no tienen ningún punto de tangente horizontal.

b) La derivada de una función polinómica de primer grado es una función constante. Por tanto, es g'.

c) La derivada de una función polinómica de segunda grado es una función polinómica de primer grado. Por tanto, es f'.

d) Como j' tiene forma de parábola, al ser una función polinómica de segundo grado, la función j es polinómica de tercer grado.

e) $D[ln\, x] = \dfrac{1}{x}$ y se corresponde con la función h' ya que tiene forma de hipérbola.

Por tanto, h puede ser la función logaritmo neperiano.

37 **Averigua para qué valores de x es $f'(x) = 0$ en cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2(3x-8)}{12}$ **b)** $f(x) = x^4 + 2x^2$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ **d)** $f(x) = e^x(x-1)$

a) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 8x^2}{12} \to f'(x) = \dfrac{9x^2 - 16x}{12}$

$f'(x) = 0 \to 9x^2 - 16x = 0 \to x(9x-16) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{16}{9} \end{array} \right.$

b) $f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2+1)$

$f'(x) = 0 \to 4x(x^2+1) = 0 \to x = 0$

c) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \to -2x = 0 \to x = 0$

d) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x \cdot 1 = e^x(x-1+1) = e^x x$

$f'(x) = 0 \to x = 0$

38 **Averigua si en las siguientes funciones existen puntos en los que $f'(x) = 0$:**

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ **c)** $f(x) = ln(x+1)$ **d)** $f(x) = 10 - (x-2)^4$

a) $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - (2x-3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2} = \dfrac{5}{(x+1)^2}$

$f'(x) \neq 0$ para cualquier valor de x.

b) $f'(x) = \dfrac{6(x^2+1) - 6x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{6x^2+6-12x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \to -6x^2 + 6 = 0 \to x^2 = 1 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \to (-1, -3) \\ x = 1 \to (1, 3) \end{array} \right.$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \neq 0$ para cualquier valor de x.

d) $f'(x) = -4(x-2)^3$

$f'(x) = 0 \to x = 2 \to (2, 10)$

39 **Halla la pendiente de la recta tangente a las siguientes funciones en el punto de abscisa que se indica en cada caso:**

a) $y = sen\, x \cos x$ **en** $x = \frac{\pi}{4}$

b) $y = x \ln x$ **en** $x = e$

c) $y = \frac{x^2}{e^x}$ **en** $x = 0$ **y** $x = 1$

d) $y = e^{x^2 - 1}$ **en** $x = 1$

Debemos hallar la derivada en los puntos indicados en cada caso:

a) $y' = \cos x \cdot \cos x + sen\, x(-sen\, x) = \cos^2 x - sen^2 x$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

b) $y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1;\ \ y'(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2$

c) $y' = \frac{2xe^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2x - x^2)}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$

$$y'(0) = 0;\ \ y'(1) = \frac{1}{e}$$

d) $y' = 2x\, e^{x^2 - 1};\ \ y'(1) = 2$

Página 171

Cuestiones teóricas

40 **¿Cuántos puntos de derivada nula puede tener una función polinómica de tercer grado? ¿Es posible que no tenga ninguno? ¿Es posible que solo tenga uno?**

Como la derivada de una función polinómica de tercer grado es una función polinómica de segundo grado, tiene un máximo de dos puntos de derivada nula.

Puede ser que no tenga puntos de derivada nula. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3 + x$ no tiene puntos de derivada nula porque $f'(x) = 3x^2 + 1$ nunca se anula.

También puede tener un único punto con derivada nula. Por ejemplo, la función $f(x) = (x - 2)^3$ solo tiene un punto de derivada nula porque $f'(x) = 3(x - 2)^2$ solo se anula cuando $x = 2$.

41 **Justifica que una función polinómica de segundo grado tiene siempre un punto de tangente horizontal.**

La derivada de una función polinómica de segundo grado es una función polinómica de primer grado. Si $f(x)$ es la función, entonces $f'(x) = ax + b$ con $a \neq 0$.

En tal caso, la ecuación $f'(x) = 0 \rightarrow ax + b = 0$ siempre tiene solución y esa es la abscisa del punto de derivada nula.

42 **Si una función tiene un punto anguloso en** $x = a$**, ¿qué podemos decir de** $f'(a)$**?**

$f'(a)$ no existe.

43 **Si la derivada de una función es 0 en todo** $\mathbb{R}$**, entonces ¿la función es lineal, constante o cero?**

Si la derivada de una función en todo $\mathbb{R}$ es 0, entonces la función es constante. La derivada de una función lineal es el coeficiente de x y, por tanto, no vale 0.

44 **¿Puede haber dos funciones distintas que tengan la misma función derivada? Pon ejemplos de funciones cuya derivada sea** $f(x) = 2x$**.**

Sí. Por ejemplo, las funciones $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^2 + 3$ tienen la misma derivada, que es la función $f(x) = 2x$.

Si dos funciones se diferencian en una constante, entonces las derivadas son iguales.

45 **Supongamos que existe la derivada de f en a. Explica cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas. En el caso de haber alguna falsa, retócala para que sea verdadera:**

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a-h)-f(a)}{h} = -f'(a)$ **b)** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)-f(a)}{h-a} = f'(a)$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h} = 2f'(a)$ **d)** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} = f'(a)$

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a-h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(-\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right) = -f'(a) \rightarrow$ Verdadero.

b) $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)-f(a)}{h-a} \rightarrow$ Esta igualdad es falsa porque el resultado del límite anterior, si $a \neq 0$ y la función está definida en 0, es $\dfrac{f(0)-f(a)}{-a}$. Para que sea verdadera, tenemos que sustituir h por $a+h$ y obtenemos que $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

También sería verdadera sustituyendo a por 0, ya que $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}$.

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(2 \cdot \dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\right) = 2 \cdot f'(a) \rightarrow$ Verdadero.

d) $$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a+h)}{h} =$$

$$= \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h} - \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) =$$

$$= 2 \cdot f'(a) - f'(a) = f'(a) \rightarrow \text{Verdadero.}$$

Para profundizar

46 **Determina, si es posible, el valor del parámetro a para que la función f sea derivable en todo su dominio de definición:**

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1-e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- Si $x > 0$, $x \neq 1$: La función es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x \ln x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [a(1-e^{1-x})] = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Derivabilidad:

- Si $x > 0$, $x \neq 1$:

  Es derivable. Además: $f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ ae^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ si } a = 1.$$

Luego, para que f sea derivable en todo su dominio de definición, ha de ser $a = 1$.

47 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ **b)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2-1}$

a) Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Continuidad:

- Si $x \neq 0$:

  Es continua, pues está formada por dos funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ Es continua en } x = 0.$$

  Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 0$: Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

  $f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1 \rightarrow$ No es derivable en $x = 0$.

  Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2-1x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Por tanto, en $x = -1$ y en $x = 1$ la función no es continua (ni derivable).

Continuidad:

- Si $x \neq 0,\ x \neq -1,\ x \neq 1$:

  La función es continua, pues está formada por funciones continuas (en estos puntos).

- En $x = -1$ y en $x = 1$:

  No es continua, pues no está definida en estos puntos.

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2-1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2-1} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ La función es continua en } x = 0.$$

  Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 0,\ x \neq -1,\ x \neq 1$: Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = -1$ y en $x = 1$: No es derivable, pues no está definida la función.
- En $x = 0$:

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = -1 \ \rightarrow$ No es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

48 **Si $f(x) = x^2|x|$, halla f', f'' y f'''.**

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenemos que $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0) = 0$).

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenemos que $f''(0^-) = f'(0^+) = f''(0) = 0$).

$$f'''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 0 \\ 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$ no existe f''', puesto que $f'''(0^-) = -6 \neq f'''(0^+) = 6$).

49 **Halla la derivada *n*-ésima de las siguientes funciones:**

a) $y = e^{ax}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \ln(1 + x)$ **d)** $f(x) = x^n$

a) $y' = a\,e^{ax};\ y'' = a^2\,e^{ax};\ y''' = a^3\,e^{ax};\ \dots\ y^{n)} = a^n\,e^{ax}$

Lo demostramos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = a^{n-1}\,e^{ax}$, derivando obtenemos:

$y^{n)} = a \cdot a^{n-1}\,e^{ax} = a^n\,e^{ax}$, como queríamos demostrar.

b) $y' = \dfrac{-1}{x^2};\ y'' = \dfrac{2}{x^3};\ y''' = \dfrac{-6}{x^4};\ \dots\ y^{n)} = \dfrac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}}$

Lo demostramos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$, derivando obtenemos:

$y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\,(-1) \cdot n}{x^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$, como queríamos demostrar.

c) $y' = \dfrac{1}{1+x};\ y'' = \dfrac{-1}{(1+x)^2};\ y''' = \dfrac{2}{(1+x)^3};\ \dots\ y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}$

Lo demostramos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)!}{(1+x)^{n-1}}$, derivando obtenemos:

$$y^{n)} = \frac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)!\,(-1)\,(n-1)}{(1+x)^n} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}, \text{ como queríamos demostrar.}$$

d) $f'(x) = nx^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)\,x^{n-2}$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$

…

$f^{n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(n-1)]\,x^{n-n} = n!$

50 **Calcula $f'(0)$ para la siguiente función:**

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{2x+1}}$$

* ***Aplica las propiedades de los logaritmos antes de derivar.***

Hallamos $f'(x)$ y después sustituimos en $x = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\,[\ln(e^x + e^{-x}) - \ln(2x+1)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{2}{2x+1}\right]$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$$

51 **Prueba, utilizando la definición de derivada, que la siguiente función es derivable en $x = 1$ y no lo es en $x = -1$:**

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

El dominio de definición es el intervalo $[-1, 1]$. Por tanto, el enunciado se refiere a las derivadas laterales en los puntos dados.

Veamos primero si existe la derivada por la izquierda en $x = 1$:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1-1-h)\sqrt{1-(1+h)^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h\sqrt{-2h-h^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} (-\sqrt{-2h-h^2}) = 0 \;\to\; \text{Existe la derivada y } f'(1^-) = 0.$$

Veamos ahora la existencia de la derivada lateral por la derecha en $x = -1$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+1-h)\sqrt{1-(-1+h)^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(2-h)\sqrt{2h-h^2}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \left[(2-h)\sqrt{\frac{2h-h^2}{h^2}}\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \left[(2-h)\sqrt{\frac{2}{h}-1}\right] = +\infty \;\to\; \text{No existe } f'(-1^+).$$

Autoevaluación

Página 171

1 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 3x\sqrt{2x+1}$

b) $y = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

c) $y = \dfrac{x}{(x+2)^2}$

d) $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2$

e) $y = e^{2x+1}$

f) $y = ln\left(\dfrac{x}{3}+1\right)$

a) $y' = 3\sqrt{2x+1} + 3x\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{3(2x+1)+3x}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{9x+3}{\sqrt{2x+1}}$

b) $y' = \dfrac{-5 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{-5}{2x\sqrt{x}}$

c) $y' = \dfrac{(x+2)^2 - x \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \dfrac{x+2-2x}{(x+2)^3} = \dfrac{-x+2}{(x+2)^3}$

d) $y' = 2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\dfrac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = 2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\dfrac{-2}{(1+x)^2} = \dfrac{-4(1-x)}{(1+x)^3}$

e) $y' = 2e^{2x+1}$

f) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{x}{3}+1} = \dfrac{1}{3} : \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{1}{x+3}$

2 Aplica las propiedades de los logaritmos para hallar la derivada de estas funciones:

a) $f(x) = ln\sqrt[5]{x^2-5x}$

b) $f(x) = ln\dfrac{\sqrt{x^3+3x}}{cos^2 x^2}$

a) $f(x) = ln(x^2-5x)^{1/5} = \dfrac{1}{5}ln(x^2-5x) \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{5}\dfrac{2x-5}{x^2-5x} = \dfrac{2x-5}{5(x^2-5x)}$

b) $f(x) = ln\dfrac{(x^3+3x)^{1/2}}{cos^2 x^2} = \dfrac{1}{2}ln(x^3+3x) - 2ln\,cos\,x^2 \rightarrow$

$\rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{3x^2+3}{x^3+3x} - 2\dfrac{-sen\,x^2 \cdot 2x}{cos\,x^2} = \dfrac{3(x^2+1)}{2(x^3+3x)} + \dfrac{4x\,sen\,x^2}{cos\,x^2} = \dfrac{3(x^2+1)}{2(x^3+3x)} + 4x\,tg\,x^2$

3 Aplica la definición de derivada para hallar $f'(x)$ siendo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$f(x+h) - f(x) = \dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2 \cdot x^2} = \dfrac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}\dfrac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2 h} = \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{-2}{x^3}$

4 **Dada la función $f(x) = |x| + |x^2 + 2x|$, defínela por intervalos y obtén:**

a) $f'(x)$

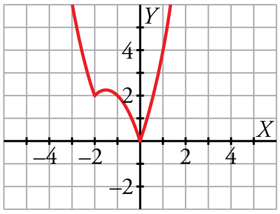
b) $f''(x)$

Representa $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$|x^2 + 2x| = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 2x & \text{si } -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

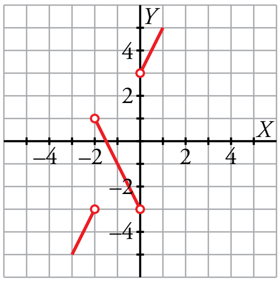
$$f(x) = |x| + |x^2 + 2x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 3x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^2 + 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Gráfica de $f(x)$

$f(x)$ no es derivable en $x = -2$ y $x = 0$ ya que los puntos son angulosos. La derivada es:

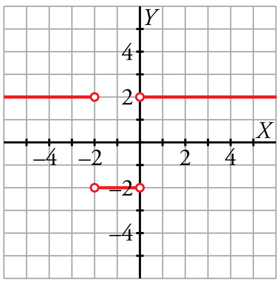
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ -2x - 3 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Gráfica de $f'(x)$

Al no existir $f'(-2)$ ni $f'(0)$, no existen $f''(-2)$ ni $f''(0)$.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Gráfica de $f''(x)$

5 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua si $x < 1$ y si $x > 1$, porque las funciones que la definen lo son.

Estudiamos la continuidad en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{4}{x+1} = 2 \end{cases}$$

$$f(1) = 1 + 2 - 1 = 2$$

Como $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$, f es continua en $x = 1$.

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$.

Hallamos $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-4}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f es derivable si $x < 1$ y si $x > 1$.

Estudiamos su derivabilidad en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 \\ f'(1^+) = \dfrac{-4}{(1+1)^2} = -1 \end{array}\right\} \text{ Como } f'(1^-) \ne f'(1^+), \text{ no existe } f'(1).$$

f es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

6 **Calcula el valor de los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable:**

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Representa la función para los valores hallados de a y b.

Para que f sea derivable en $x = 0$, debe ser continua en ese punto.

$$\lim_{x \to 0} f(x) \left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 3x + 2) = 2 \end{cases}\right\}$$

Para que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2$, debe ser $b = 2$.

Si $b = 2$, f es continua en $\mathbb{R}$.

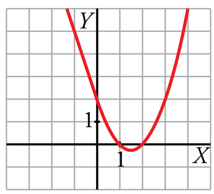
$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Veamos si f es derivable en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = a \\ f'(0^+) = -3 \end{array}\right\} \text{ Para que exista } f'(0), \text{ debe ser } a = -3.$$

Si $a = -3$, f es derivable en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$



7 Indica en qué puntos no es derivable la siguiente función:

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

Justifica tu respuesta.

Definimos la función por intervalos. Para ello, hacemos:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

Hallamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad de f en $x = 1$ y en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 \\ f'(1^+) = -2 \cdot 1 + 4 = 2 \end{array}\right\} \text{ Como } f'(1^-) \ne f'(1^+), \text{ no existe } f'(1).$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -2 \cdot 3 + 4 = -2 \\ f'(3^+) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 \end{array}\right\} \text{ Como } f'(3^-) \ne f'(3^+), \text{ no existe } f'(3).$$

f no es derivable ni en $x = 1$, ni en $x = 3$.

8 Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente es igual a 0 en cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

a) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\,2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -4x = 0 \rightarrow x = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3\,2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \sqrt{3},\ x = -\sqrt{3}$