Apellidos: Nombre: Grupo:

¡SE DEBEN JUSTIFICAR TODOS LOS PASOS Y SIMPLIFICAR! TODO EJERCICIO ESCRITO A LÁPIZ NO SERÁ EVALUADO

1.- Dados los puntos A(a,0,1); B(0,1,2); C(1,2,3) y D(7,2,1). Calcular

a) **(10 puntos)** el valor de "a" para que sean coplanarios y también la ecuación del plano que los contiene para ese valor.

$$\overrightarrow{AB}(-a,1,1);\ \overrightarrow{AC}(1-a,2,2);\ \overrightarrow{AD}(7-a,2,0) \Rightarrow \det\left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right) = 2a+2=0 \Rightarrow a=-1$$

$$\pi \equiv \left(A(-1,0,1), \overrightarrow{AB}(1,1,1);\ \overrightarrow{AD}(8,2,0) \sim (4,1,0)\right) \Rightarrow \pi \equiv x-4y+3z-2=0$$

b) **(15 puntos)** el punto simétrico de B respecto de la recta que pasa por C y D.

$$Q = \mathrm{Proy}_{r_{CD}} B = \pi \cap r_{CD} \ \text{con } \pi \text{ tal que } \pi \perp r_{CD} \ \text{y} \ B \in \pi$$

$$r_{CD}\left(C(1,2,3), \overrightarrow{CD}(6,0,-2) \sim (3,0,-1)\right) \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2 \\ z = 3-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\pi \equiv \left(B(0,1,2), \vec{n}(3,0-1)\right) \Rightarrow 3x - z + D = 0 \ \text{pasa por } B \Rightarrow D = 2 \Rightarrow \pi \equiv 3x - z + 2 = 0$$

$$Q = \mathrm{Proy}_{r_{CD}} B = \pi \cap r_{CD} \Rightarrow 3(1+3\lambda) - (3-\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5} \Rightarrow Q\left(\frac{2}{5}, 2, \frac{16}{5}\right)$$

$$B'(x',y',z') \ \text{tq} \ Q = PM_{\overline{BB'}} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}, 2, \frac{16}{5}\right) = \left(\frac{x'+0}{2}, \frac{y'+1}{2}, \frac{z'+2}{2}\right) \Rightarrow B'\left(\frac{4}{5}, 3, \frac{22}{5}\right)$$

2.- Estudiar las posiciones relativas de los planos $\pi_1 \equiv x+y+z+3=0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -3+\lambda \\ y = -\lambda+\mu \\ z = -6-\mu \end{cases} \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$; y de la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = y = \dfrac{z-3}{3}$ con relación a ellos.

Hallar los puntos de r que estén a la misma distancia de π_1 y π_2.

$$\left.\begin{array}{l} \text{El vector normal de } \pi_1 \text{ es: } \vec{n}_1(1,1,1) \\ \text{El vector normal de } \pi_2 \text{ es: } \vec{n}_2 = (1,-1,0) \wedge (0,1,-1) = (1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \to \text{paralelos o coincidentes}$$

$$\text{Tomamos } A(-3,0,6) \in \pi_2 \ \text{y} \ A \notin \pi_1 \ (-3+0-6+3 \neq 0) \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$$

$$\text{P.R. de la recta y los planos: } \vec{u}_r(2,1,3) \Rightarrow ¿\vec{u}_r \perp \vec{n}? \Leftrightarrow (2,1,3)\cdot(1,1,1) = 6 \neq 0 \Rightarrow r \text{ corta a los dos planos (paralelos)}$$

$$P \in r \Rightarrow P(3+2\lambda, \lambda, 3+3\lambda)$$

$$\pi_2 \equiv x+y+z+D=0 \quad \text{pasa por } (-3,0,-6) \Rightarrow D=9 \to_2 \equiv x+y+z+9=0$$

$$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \Leftrightarrow \frac{|3+2\lambda+\lambda+3+3\lambda+3|}{\sqrt{3}} = \frac{|3+2\lambda+\lambda+3+3\lambda+9|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |6\lambda+9| = |6\lambda+15|$$

$$\begin{cases} 6\lambda+9 = 6\lambda+15 \Rightarrow \text{no tiene sol.} \\ 6\lambda+9 = -6\lambda-15 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow P(-1,-2,-3) \end{cases}$$

Todos los aparatos electrónicos (teléfonos, relojes,…) tienen que estar <u>APAGADOS</u>.

3.- a) **(10 puntos)** Dado el plano $\pi \equiv 2x-y-2z-3=0$, calcular el valor de "a" para que la recta r, que pasa por los puntos P(a,a,a) y Q(1,3,0) sea paralela al plano π.

$$\vec{n}(2,-1,-2) \quad \vec{u}=\overrightarrow{QP}(a-1,a-3,a) \Rightarrow r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2,-1,-2)\cdot(a-1,a-3,a)=1-a=0 \Rightarrow a=1;\ como\ Q\notin\pi\ (2-3-0-3\neq 0) \mapsto r\parallel\pi \Leftrightarrow a=1$$

b) **(5 puntos)** Para $a=-1$, calcular el ángulo que forma r con π.

$$\vec{n}(2,-1,-2) \quad \vec{u}(-2,-4,-1) \Rightarrow sen\alpha=\frac{|(2,-1,-2)\cdot(-2,-4,-1)|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{21}}=\frac{2}{3\sqrt{21}} \Rightarrow \alpha=arcsen\frac{2}{3\sqrt{21}}=8^{o}\ 21'\ 54''$$

c) **(10 puntos)** Para $a=1$, calcular la ecuación continua de la proyección ortogonal de r sobre π.

$$Para\ \ a=1 \quad r\parallel\pi \qquad \vec{u}_{proy_\pi r}=\vec{u}(0,-2,1) \quad Hacemos\ una\ proyección\ de\ un\ punto\ de\ r\ sobre\ \pi \Leftrightarrow A=proy_p\pi=s\cap\pi$$

$$s\perp\pi\ \ pasando\ \ por\ \ P \Leftrightarrow s(\vec{u}=\vec{n}(2,-1,-2);P(1,1,1)) \Rightarrow s\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$$

$$A=s\cap\pi=2(1+2t)-(1-t)-2(1-2t)-3=9t-4=0 \Rightarrow t=4/9 \Rightarrow A\left(\frac{17}{9},\frac{5}{9},\frac{1}{9}\right) \to proy_r\pi\equiv\frac{x-\frac{17}{9}}{0}=\frac{y-\frac{5}{9}}{-2}=\frac{z-\frac{1}{9}}{1}$$

$$\pi'\equiv\begin{cases}\pi\perp\pi'\to\vec{u}=\vec{n}_\pi(2,-1,2)\\ r\subset\pi'\to\vec{v}=\vec{u}_r(0,-2,1)\\ \qquad Q(1,3,0)\end{cases} \Rightarrow \pi'\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y-3 & z\\ 2 & -1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=-5x-2y-4z+11=0 \Rightarrow$$

$$proy_\pi r=\pi\cap\pi'\equiv\begin{cases}5x+2y+4z-11=0\\ 2x-y-2z-3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{w}=(5,2,4)\wedge(2,-1,-2)=(0,18,-9)\parallel(0,2,-1)\\ z=0 \Rightarrow \begin{cases}5x+2y=11\\ 2x-y=3\end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{17}{9},\frac{7}{9},0\right)\end{cases} \Rightarrow \frac{x-\frac{17}{9}}{0}=\frac{x-\frac{7}{9}}{2}=\frac{z}{-1}$$

4.- a) Dados los vectores $\vec{u}(1,2,1);\ \vec{v}(2,1,1);\ \vec{w}(0,2,1)$ determinar el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores. $v=\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{matrix}\right\|=|-1|=1\ u^3$

Dadas las rectas $r\equiv\dfrac{x+14}{4}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z+2}{1}$ $\qquad s\equiv\begin{cases}-x+y+2z-4=0\\ x+2y+z-5=0\end{cases}$ determinar:

b) la posición relativa de las rectas r y s.

$$r\equiv\begin{cases}P_r(-14,0,-2)\\ \vec{u}_r(4,6,1)\end{cases} \qquad s\equiv\begin{cases}P_s(-1,3,0)\\ \vec{u}_s=(-1,1,2)\wedge(1,2,1)=)(-3,3,-1)\parallel(1,-1,1)\end{cases}$$

$$\vec{u}_r\not\parallel\vec{u}_s \Rightarrow \text{se cortan o se cruzan. } \overrightarrow{P_rP_s}(13,3,2) \Rightarrow \begin{vmatrix}4 & 6 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 13 & 3 & 2\end{vmatrix}=62\neq 0 \Rightarrow r\ \ y\ \ s\ se\ cruzan$$

c) la distancia de r a s. $d(r,s)=\dfrac{|\overrightarrow{AB}.(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s|}=\dfrac{|62|}{|(7,-3,-10)|}=\dfrac{62}{\sqrt{158}}\ u.$

d) el ángulo formado por r y s. $\cos\alpha=\dfrac{|(4,6,1)\cdot(1,-1,1)|}{\sqrt{53}\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{159}} \Rightarrow \alpha=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{159}}=85^{o}\ 27'\ 5''$

TODO EJERCICIO A LÁPIZ NO SERÁ EVALUADO

A.G.Onandía