Apellidos: **Nombre:** **Grupo:**

1.- Sean P(1, 2, 1), Q(2, 3, 1), R(-1, 4, 3) y S(0, 5, 3).

a) Demostrar que los cuatro puntos están en el mismo plano. Determinar la ecuación general del plano π que los contiene.

$$\overrightarrow{PQ}=(1,1,0)\quad \overrightarrow{PR}=(-2,2,2)\parallel(-1,1,1)\quad \overrightarrow{PS}=(-1,3,2)\qquad Como\ \det\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ran\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right)=2\Rightarrow \overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\ son\ coplanarios\Rightarrow P,Q,R\ y\ S\ son\ coplanarios$$

$$\pi\left(\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(1,1,0),\vec{v}=\overrightarrow{PR}(-1,1,1),P(1,2,0)\right)\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=x-y+2\cdot z-1=0$$

b) Demostrar que el polígono que tiene como vértices esos cuatro puntos es un rectángulo. Calcular su área.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(1,1,0)\cdot(-1,1,1)=0\Rightarrow \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{PR}\\ \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}(1,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow PQSR\ es\ un\ rectángulo.$$

$$Área=\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

c) Hallar el volumen del tetraedro que determinan los puntos de corte del plano π con los ejes cartesianos y el origen de coordenadas.

$$\pi\cap OX=(1,0,0)\quad \pi\cap OY=(0,-1,0)\quad \pi\cap OZ=(0,0,1/2)\Rightarrow V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

2.- Se consideran los puntos A(2, 1, -1), B(1, 4, 1) y C(1, 3, 1).

a) Comprobar que determinan un triángulo y hallar su área.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-1,3,2),\ \overrightarrow{AC}(-1,2,2)\\ \dfrac{-1}{-1}\neq\dfrac{3}{2}\ \Rightarrow no\ alineados\end{array}\right\}\Rightarrow Área=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|(2,0,1)\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

b) Determinar un plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio.

$$PM_{AB}=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},0\right)\quad \vec{n}=\overrightarrow{AB}=(-1,3,2)\ \Rightarrow \pi\equiv -x+3y+2z-6=0\quad \pi\equiv x-3y-2z+6=0$$

c) Si desde el punto D(1, 1, -1) se trazan rectas a cada uno de los puntos A, B y C, se obtiene una pirámide. Hallar la altura de dicha pirámide y su volumen.

$$\overrightarrow{AB}(-1,3,2),\ \overrightarrow{AC}(-1,2,2),\ \overrightarrow{AD}(-1,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}Volumen=\dfrac{1}{6}\left|\left((-1,3,2)\wedge(-1,2,2)\right)\cdot(-1,3,2)\right|=\dfrac{1}{6}\left|(2,0,1)\cdot(-1,3,2)\right|=\dfrac{1}{3}\\ Volumen=1/3(ÁreaBase\cdot Altura)\end{array}\right\}\Rightarrow Altura=3\frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Todos los aparatos electrónicos (teléfonos, relojes,…) tienen que estar APAGADOS.

3.- Hallar:

a) La ecuación general del plano que pasa por A(-1, -1, 0) y es paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3-5t \\ y = 1+2t \\ z = 3 \end{cases}, \text{ y } s \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$\pi(\vec{u}_r, \vec{u}_s, A) \;\; como \;\; \vec{u}_r = (3,-1,1)\wedge(1.2-1) = (-1,4,7) \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ -5 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 14x + 35y - 18z + 49 = 0$$

b) La ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(2, -1, 5) y es paralela a los planos

$\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} r(\vec{n}_{\pi_1} \wedge \vec{n}_{\pi_2}, P) \\ \vec{n}_{\pi_1} \wedge \vec{n}_{\pi_2} = (1,-3,1)\wedge(2,-1,3) = (-8,-1,5) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

4.- Dadas las rectas: $r_1 \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{2-y}{1} = \dfrac{z}{2}$ y $r_2 \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+2}{1}$

a) Hallar un vector que sea perpendicular a r_1 y r_2.

b) Hallar la ecuación de la recta r que se apoya perpendicularmente en las dos rectas.

$$r_1 \to \vec{u}(1,-1,2) \quad A(-1,2,0) \qquad r_2 \to \vec{v}(3,1,1) \quad B(2,-1,-2) \Rightarrow \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-3,5,4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1(A, \vec{u}, \vec{w}) \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \to \pi_1 \equiv 7x + 5y - z - 3 = 0 \\ \pi_2(B, \vec{v}, \vec{w}) \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \to \pi_2 \equiv x + 15y - 18z - 23 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow r = \pi_1 \cap \pi_2 = \begin{cases} 7x + 5y - z - 3 = 0 \\ x + 15y - 18z - 23 = 0 \end{cases}$$

5.- Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$, y el plano $\pi \equiv x + my - z - 6 = 0$, determinar m para que:

a) π sea paralelo a r.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = (1,1,0)\wedge(1,0,1) = (1,-1,-1) \qquad \pi \equiv x + my - z - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi(1,m,-1)$$

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Leftrightarrow (1,-1,-1)\cdot(1,m,-1) = 2 - m = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$veamos \;\; que \;\; no \;\; está \;\; contenida: P_r(0,1,-1) \;\; sustuimos \;\; en \;\; el \;\; plano: 0 + 2 + 1 - 6 \neq 0 \Rightarrow P_r \notin \pi$$

b) π sea perpendicular a r. Hallar el punto de intersección.

$$r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{u}_r(1,-1,-1) \parallel \vec{n}_\pi(1,m,-1) \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} \Rightarrow m = -1$$

$$\pi \equiv x - y - z - 6 = 0 \quad r \equiv (x,y,z) = (\lambda, 1-\lambda, -1-\lambda) \Rightarrow \lambda - (1-\lambda) - (-1-\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \to r \cap \pi = P(2,-1,-3)$$

c) ¿Puede existir un valor de "m" para que r esté contenida en π? No, contestado en a)

TODO EJERCICIO A LÁPIZ NO SERÁ EVALUADO

A.G.Onandía