Apellidos: **Nombre:** **Grupo:**

¡SE DEBEN JUSTIFICAR TODOS LOS PASOS Y SIMPLIFICAR! TODO EJERCICIO ESCRITO A LÁPIZ NO SERÁ EVALUADO

1.- a) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & a & -1 & 2\\ 2 & -1 & a & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$ calcular su rango, dependiendo del parámetro “a”.

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 10\end{vmatrix}=21\neq 0\quad ran(M)\geq 2\quad Orlamos$$

$$\begin{vmatrix}1 & a & -1\\ 2 & -1 & a\\ 1 & 10 & -6\end{vmatrix}=a^2+2a-15=0\Rightarrow a=-5\vee a=3$$

$$\begin{vmatrix}1 & a & 2\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 10 & 1\end{vmatrix}=3a-9=0\Rightarrow a=3$$

$$\Rightarrow\quad \odot\ si\ a\neq 3\Rightarrow ran(M)=3\qquad \odot\ si\ a=3\Rightarrow ran(M)=2$$

b) Resolver adecuadamente el sistema: $\begin{cases}2A-3B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -6\end{pmatrix}\\ 3A+2B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\end{cases}$

$$\begin{cases}2A-3B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -6\end{pmatrix}\\ 3A+2B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4A-6B=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -6\end{pmatrix}\\ 9A+6B=3\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow 13A=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -6\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}-3A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

2.- Resolver la siguiente ecuación matricial $AX-2B=C$ con

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Estudiar si existe solución de la ecuación $X(A+B)=3C$.

$\bullet\ AX-2B=C\Leftrightarrow AX=C+2B\Leftrightarrow X=A^{-1}(C+2B)$

$$|A|=-2\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 4 & -3\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 4 & -3\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3 & 9\\ -3 & 3 & -4\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3 & 33 & 23\\ 5 & -11 & 1\\ -1 & -5 & -7\end{pmatrix}$$

$$\bullet\ X=3C(A+B)^{-1}\quad como\ |A+B|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow\nexists(A+B)^{-1}\Leftrightarrow NO\ EXISTE\ SOLUCIÓN$$

Todos los aparatos electrónicos (teléfonos, relojes,…) tienen que estar <u>APAGADOS</u>.

3.- a) Sean A y B las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}2x & 2 & 3+x\\ 2 & x & 5\\ 10 & 6 & x+5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}x & 2 & 3\\ 1 & x & 4\\ 5 & 6 & x\end{pmatrix}$ sabiendo que el determinante de B vale 7 utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor del determinante de A. Enunciar las propiedades utilizadas.

$$|A|=\begin{vmatrix}2x & 2 & 3+x\\ 2 & x & 5\\ 10 & 6 & x+5\end{vmatrix}\underset{c_1/2}{=}2\begin{vmatrix}x & 2 & 3+x\\ 1 & x & 5\\ 5 & 6 & x+5\end{vmatrix}\underset{desdoblamos\ c_3}{=}2\left(\begin{vmatrix}x & 2 & 3\\ 1 & x & 4\\ 5 & 6 & x\end{vmatrix}+\underbrace{\begin{vmatrix}x & 2 & x\\ 1 & x & 1\\ 5 & 6 & 5\end{vmatrix}}_{=0\ c_1=c_3}\right)=2\begin{vmatrix}x & 2 & 3\\ 1 & x & 4\\ 5 & 6 & x\end{vmatrix}=14$$

b) Determinar una matriz que verifique $AX+XA=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ con $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}2a+b=2 & 2b=-2\\ a+2c+d=3 & b+2d=3\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}a=\frac{3}{2} & b=-1\\ c=-\frac{1}{4} & c=2\end{matrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -1\\ -\frac{1}{4} & 2\end{pmatrix}$$

4.- Estudiar para los diferentes valores del parámetro "a", la existencia de soluciones del sistema:

$\begin{cases}x+y+z=a-1\\ 2x+y+az=a\\ x+ay+z=1\end{cases}$ y resolverlo cuando sea posible.

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a-1\\ 2 & 1 & a & a\\ 1 & a & 1 & 1\end{array}\right)\quad |A|=-a^2+3a-2=-(a-1)(a-2)=0\Rightarrow a=2\vee a=1\ \ como\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow ran(A)\geq 2$$

$\odot$ $si\ a\neq 1\wedge a\neq 2\Rightarrow ran(\mathrm{A})=\mathrm{ran}(A^*)=n=3\Leftrightarrow SCD$ $\quad x=\dfrac{1}{-(a-1)(a-2)}\begin{vmatrix}a-1 & 1 & 1\\ a & 1 & a\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}=\dfrac{-a^3+2a^2+a-2}{-(a-1)(a-2)}=a+1$

$$y=\frac{1}{-(a-1)(a-2)}\begin{vmatrix}1 & a-1 & 1\\ 2 & a & a\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{a^2-4a+4}{-(a-1)(a-2)}=\frac{2-a}{a-1}\qquad z=\frac{1}{-(a-1)(a-2)}\begin{vmatrix}1 & 1 & a-1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}=\frac{a^2-2a}{-(a-1)(a-2)}=\frac{a}{1-a}$$

$\odot$ $si\ a=2\Rightarrow Orlamos\ el\ menor\ de\ 2x2\ no\ nulo$ $\nearrow |A|=0$, $\searrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$ $\Rightarrow ran(A)=ran(A^*)=2<n=3\Leftrightarrow SCI$

$$\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+y+2z=2\end{cases}\underset{z=\lambda}{\Rightarrow}\begin{cases}x+y=1-\lambda\\ 2x+y=2-2\lambda\end{cases}\Rightarrow x=1-\lambda;\ y=0;\ z=\lambda\quad soluciones\ (1-\lambda,\ 0,\ \lambda)\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$\odot$ $Si\ a=1\Rightarrow Orlamos\ el\ menor\ de\ 2x2\ no\ nulo$ $\nearrow |A|=0$, $\searrow \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1$ $\Rightarrow ran(A)=2\neq ran(A^*)=3\Leftrightarrow SI$

TODO EJERCICIO A LÁPIZ NO SERÁ EVALUADO

A.G.Onandía