Apellidos: **Nombre:** **Grupo:**

¡SE DEBEN JUSTIFICAR TODOS LOS PASOS Y SIMPLIFICAR! TODO EJERCICIO ESCRITO A LÁPIZ NO SERÁ EVALUADO

1.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, se pide:

a) **(5 puntos)** Hallar $A^n \ \forall n\in\mathbb{N}$, y calcular, si existe, la inversa de A.

b) **(15 puntos)** Hallar $(I+A)^{10}$; $(I+A)^n \ \forall n\in\mathbb{N}$ y calcular, si existe, la inversa de I+A.

$$a)\ A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ A^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ \forall n\in\mathbb{N};\ n\ge 3.\quad Como\ |A|=0\Rightarrow \nexists A^{-1}$$

$$b)\bullet I+A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ (I+A)^2=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot a & a^2\\ 0 & 1 & 2\cdot a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ (I+A)^3=\begin{pmatrix}1 & 3\cdot a & 3\cdot a^2\\ 0 & 1 & 3\cdot a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ (I+A)^4=\begin{pmatrix}1 & 4\cdot a & 6\cdot a^2\\ 0 & 1 & 4\cdot a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$(I+A)^5=\begin{pmatrix}1 & 4\cdot a & 6\cdot a^2\\ 0 & 1 & 4\cdot a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ldots;(I+A)^{10}=\begin{pmatrix}1 & 10\cdot a & 45\cdot a^2\\ 0 & 1 & 10\cdot a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\bullet(I+A)^n=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{n}\cdot a & \dfrac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot a^2\\ 0 & 1 & \mathrm{n}\cdot a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad Demostración\ \ por\ \ inducción\ transfinita:$$

$i)\ Se\ verifica\ \ n=2.\quad Demostrado\ \ arriba.$

$$ii)\ \text{Se supone cierto para n}-1\Leftrightarrow(I+A)^{n-1}=\begin{pmatrix}1 & (\mathrm{n}-1)\cdot a & \dfrac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}\cdot a^2\\ 0 & 1 & (\mathrm{n}-1)\cdot a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$iii)\ Se\ demuestra\ \ para\ \ n.\ \ (I+A)^n=(I+A).(\mathrm{I}+A)^{n-1}=(por\ \ hipótesis\ \ de\ \ inducción)$$

$$=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & (\mathrm{n}-1)\cdot a & \dfrac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}\cdot a^2\\ 0 & 1 & (\mathrm{n}-1)\cdot a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \mathrm{n}\cdot a & \dfrac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot a^2\\ 0 & 1 & \mathrm{n}\cdot a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad q.e.d.$$

$$\bullet|I+A|=1\Rightarrow\exists(I+A)^{-1}\Rightarrow Adj(I+A)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -a & 1 & 0\\ a^2 & -a & 1\end{pmatrix}\Rightarrow(I+A)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -a & a^2\\ 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Todos los aparatos electrónicos (teléfonos, relojes,…) tienen que estar APAGADOS.

2.- a) **(5 puntos)** Demostrar que $X = A\left(I-2B^{-1}\right)$ es solución de la ecuación matricial $A\left(B-I\right) = X\cdot B + A$

$$A\left(B-I\right) = X\cdot B + A \Leftrightarrow AB - A = XB + A \Leftrightarrow AB - 2A = XB \Leftrightarrow \left(AB-2A\right)B^{-1} = X \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X = A - 2AB^{-1} = A\left(I-2B^{-1}\right)$$

b) **(10 puntos)** Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ ¿Para qué valores de "a" tiene solución la ecuación $A\left(B-I\right) = X\cdot B + A$?. ¿Cuánto tiene que valer "a" para que la solución sea $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 61 & -10 \end{pmatrix}$?

Para que tenga solución la condición es que exista B^{-1}, por tanto, como $|B|=2$, siempre hay sol.

$$|B| = 2 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2B^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow I - 2B^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = A\left(I-2B^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6a+55 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow 6a + 55 = 61 \Rightarrow a = 1$$

3.- **(25 puntos)** Discutir y resolver, cuando sea posible, el sistema: $\begin{cases} x+y+z = m-1 \\ mx+2y+z = m \\ x+y+mz = 1 \end{cases}$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m-1 \\ m & 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \end{array}\right) \quad ranA? \rightarrow |A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow m=1 \\ \\ \searrow m=2 \end{array} \quad por\ \ t^{m^a}\ \ de\ \ Rouché-Fröbenius$$

$\odot$ $si\ \ m \neq 1 \wedge m \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow ranA = 3 = ranA^* = \text{n} \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Leftrightarrow \exists!\ solución$

$$\text{Resolvemos por Cramer}: x = \frac{1}{|\text{A}|}\cdot\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \frac{1}{(1-m)(m-2)}\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \frac{m}{1-m}$$

$$y = \frac{1}{|\text{A}|}\cdot\begin{vmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ m & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m+1 \qquad z = \frac{1}{|\text{A}|}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ m & 2 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2-m}{m-1} \qquad SOLUCIÓN\ \left(\frac{m}{1-m},\ m+1,\ \frac{2-m}{m-1}\right) \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\odot\ \ si\ \ m=1\ \ A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \ \ nos\ \ fijamos\ \ que\ \ \begin{array}{l} E_1 \equiv x+y+z=0 \\ E_3 \equiv x+y+z=1 \end{array} son\ imposibles \Rightarrow S.I. \Leftrightarrow \nexists Sol.$$

$$\odot\ si\ \ m=2\ \ A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \ \ como\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow ranA = 2\ \ y\ como\ C_1 = C_2 = C_4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ranA = ranA^* = 2 \neq n = 3 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases} \xrightarrow[x=\lambda]{} \begin{cases} y+z = 1-\lambda \\ 2y+z = 2-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 1-\lambda \\ z = 0 \end{array} \Rightarrow SOLUCIONES\ \left(\lambda,\ 1-\lambda,\ 0\right)\ \ con\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

TODO EJERCICIO A LÁPIZ NO SERÁ EVALUADO

A.G.Onandía

4.- a) **(5 puntos)** Sea $C \in M_{3x3}$ cuyas columnas son $c_1,\ c_2$ y c_3, es decir $C=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ y su determinante vale2. Ahora consideramos la matriz M cuyas columnas son $-c_2,\ c_3+c_2$ y $3c_1$, es decir $M=(-c_2,\ c_3+c_2,\ 3c_1)$, calcular razonadamente, explicando las propiedades que utilice, el determinante de M^{-1}.

$$|M|=|(-c_2,\ c_3+c_2,\ 3c_1)| \underset{sacamos\ un-de-c_2}{\overset{3c_1\leftrightarrow c_2}{=}} |(3c_1,\ c_3+c_2,\ c_2)| \underset{c_3+c_2\to c_2}{=} |(3c_1,\ c_3,\ c_2)| \underset{c_3\leftrightarrow c_2}{\overset{Sacamos\ 3\ de\ 3c_1}{=}} -3|(c_1,\ c_2,\ c_3)|=-6$$

$$|M^{-1}|=\frac{1}{|M|}=-\frac{1}{6}$$

b) **(15 puntos)** Clasificar, según los diferentes valores del parámetro α, el sistema: $\begin{cases} \alpha x+y+z=\alpha^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3\alpha \end{cases}$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3\alpha \end{array}\right) ranA^*? \to$$

$$|A^*|=\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3\alpha \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 & \alpha^2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & 3\alpha \end{vmatrix} \overset{\substack{f_2+f_1 \\ f_3+f_1 \\ f_4+f_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha+1 & 2 & \alpha^2+1 \\ 0 & \alpha+3 & 0 & \alpha^2+1 \\ 0 & \alpha+6 & 2 & \alpha^2+3\alpha \end{vmatrix} =$$

$$=-\begin{vmatrix} \alpha+1 & 2 & \alpha^2+1 \\ \alpha+3 & 0 & \alpha^2+1 \\ \alpha+6 & 2 & \alpha^2+3\alpha \end{vmatrix} \overset{f_3-f_1}{=} -\begin{vmatrix} \alpha+1 & 2 & \alpha^2+1 \\ \alpha+3 & 0 & \alpha^2+1 \\ 5 & 0 & 3\alpha-1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \alpha+3 & \alpha^2+1 \\ 5 & 3\alpha-1 \end{vmatrix} = -2(\alpha^2-4\alpha+4) = -2(\alpha-2)^2$$

$|A^*|=0 \Rightarrow \alpha=2$

$\odot$ *si* $\alpha \neq 2 \Rightarrow |A^*| \neq 0 \Rightarrow ranA^*=4 \neq ranA \leq 3 \Rightarrow$ *Sistema Incompatible* $\Leftrightarrow \nexists$*Solución.*

$\odot$ *si* $\alpha = 2 \Rightarrow |A^*| = 0 \Rightarrow ranA^* \neq 4.$

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \underset{c_2\leftrightarrow c_1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & 6 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2+f_1 \\ f_3+f_1 \\ f_4+f_1}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 2 & 10 \end{pmatrix} \underset{f_4=f_2+f_3}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underset{c_2\leftrightarrow c_3}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow ranA = ranA^* = 3 = n \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado $\Leftrightarrow \exists!$ Solución (1,1,1)