Inecuaciones en dos variables

☑ **Desigualdad:** se llama **desigualdad** a toda relación entre expresiones numéricas o algebraicas unidas por uno de los cuatro signos de desigualdad $<, >, \leq, \geq$.

☑ **Inecuaciones de primer grado con dos variables:** son aquellas en las que las variables que intervienen están elevadas a un exponente igual a la unidad.

- ✓ **Expresión general:** son de la forma $\boxed{ax+by<c}$ y todas sus equivalentes $ax+by\leq c$, o $ax+by>c$, etc. …
  - ➢ Representan zonas del plano, o dividen al plano en zonas.
  - ➢ Pueden ser de grado mayor que uno en las dos o en una sola de las variables.
    - $y-x^2+2x<5$, o bien $x^2-y^2\leq 16$.
  - ➢ Como mucho estudiaremos del tipo primero, las del tipo segundo requieren de un conocimiento de las cónicas del que aún no disponemos. Las del tipo primero, pese a tratarse también de cónicas, éstas ya las conocemos como función cuadrática o parábola simple, es decir, ecuaciones de la forma $y=ax^2+bx+c$.

☑ **Método de resolución:** se trata en el fondo de ecuaciones de rectas o parábolas que debemos resolver y luego analizar las zonas del plano en que se cumple la desigualdad inicial.

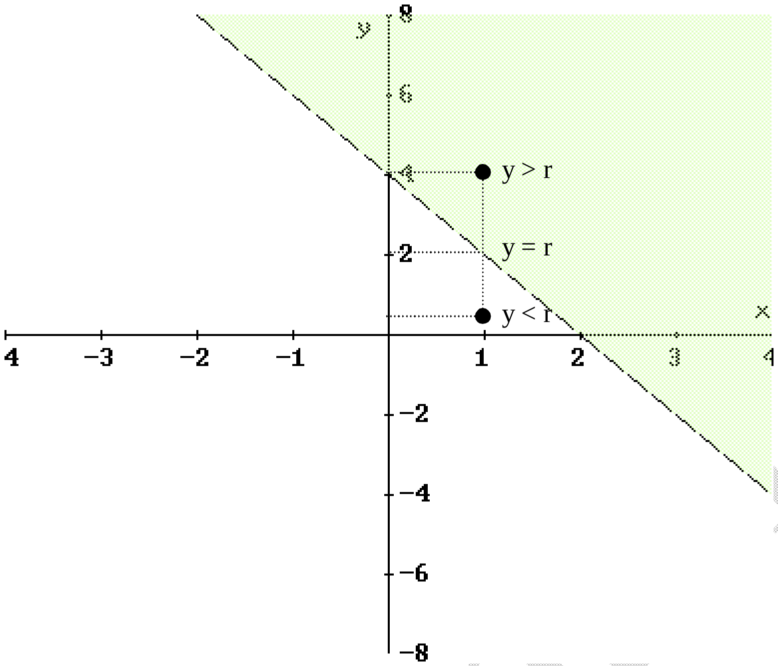
- ✓ Para las **inecuaciones de la forma** $\boxed{ax+by<c}$, pasamos primero a la ecuación lineal $y=mx+b$, despejando de modo adecuado. Ésta no es más que la ecuación de una recta en el plano, la cual divide al mismo en dos semiplanos. Uno de esos semiplanos contiene los puntos tales que $y>mx+b$ y el otro los puntos tales que $y<mx+b$. Se trata pues de determinar qué puntos son los que cumplen la desigualdad o inecuación previa. Para ello:
  - ➢ **Dibujamos la recta,** una vez dibujada tomamos un punto x del eje de abscisas cualquiera y trazamos la perpendicular por el mismo. El punto en que ésta corta a la recta es tal que $y=mx+b$, prolongando la perpendicular encontraremos los puntos tales que $y>mx+b$, y por debajo estarán los que cumplen que $y<mx+b$.
    - **Ejemplo_1:** sea la inecuación $2x+y>4$. Pasamos a la ecuación de la recta $y=-2x+4$, la cual dibujamos dando valores a x e y.

☒

x	y
0	4
2	0

con estos dos puntos es suficiente, ya que por dos puntos pasa una y solo una recta.

☒ Trazamos una recta vertical por un punto cualquiera del eje de abscisas. El punto en que ésta corta a la recta la ordenada y cumple la ecuación de la misma, es decir y = r, un punto por encima es mayor y uno por debajo es menor. Como nuestra inecuación, despejada la y, es $y > -2x + 4$, los puntos que la cumplen son los del semiplano sombreado. La recta no está incluida por ser la desigualdad estricta.

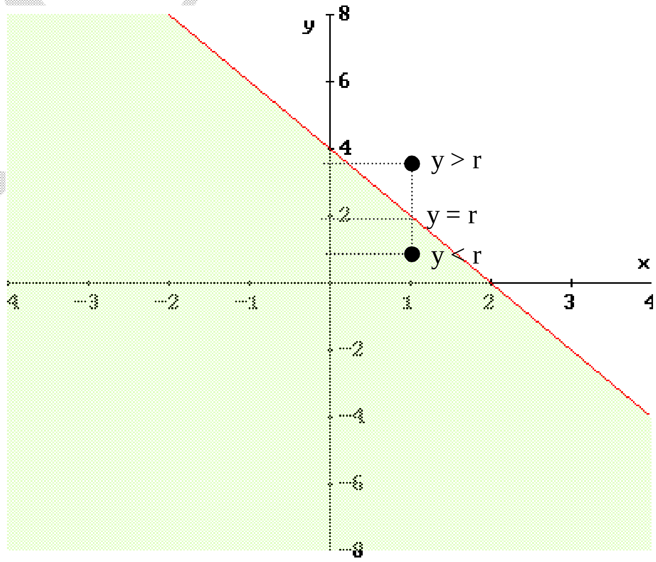


- **Ejemplo_2:** $2x + y \le 4$, es similar al anterior, solo cambia el sentido de la desigualdad y el hecho de que ahora no es estricta. Pasamos a la ecuación $y = -2x + 4$, igual que antes. Damos valores a x e y para dibujarla:

☒

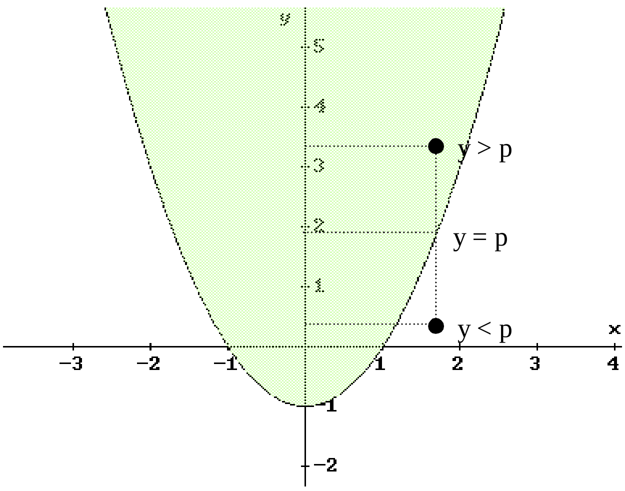
x	y
0	4
2	0

la dibujamos y procedemos como antes. Ahora la recta está incluida en la solución.



✓ Para las **inecuaciones de la forma** $\boxed{dy + ax^2 + bx + c < 0}$, pasamos primero a la ecuación $y = Ax^2 + Bx + C$, despejando de modo adecuado. Ésta no es más que la ecuación de una parábola en el plano, la cual divide al mismo en dos semiplanos. Uno de esos semiplanos contiene los puntos tales que $y > Ax^2 + Bx + C$ y el otro los puntos tales que $y < Ax^2 + Bx + C$. Se trata pues de determinar qué puntos son los que cumplen la desigualdad o inecuación previa. Para ello:

- **Dibujamos la parábola,** una vez dibujada tomamos un punto x del eje de abscisas cualquiera y trazamos la perpendicular por el mismo. El punto en que ésta corta a la parábola es tal que $y = Ax^2 + Bx + C$, prolongando la perpendicular encontraremos los puntos tales que $y > Ax^2 + Bx + C$, y por debajo estarán los que cumplen que $y < Ax^2 + Bx + C$.
  - **Ejemplo_1:** sea la inecuación $x^2 - y < 1$. Pasamos a la ecuación, despejando siempre la y, $y = x^2 - 1$ la cual dibujamos dando valores a x e y, o bien aplicando las técnicas vistas para dibujar parábolas, es decir:
    - ☒ Buscar el vértice y los puntos de corte con el eje de abscisas y con el eje de ordenadas, los cuales son:
      - Vértice, $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot 1} = 0 \Rightarrow y_v = -1$
      - Puntos de corte con el $\overline{OX} \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
      - Punto de corte con el $\overline{OY} \Rightarrow y = c \Rightarrow y = -1$
    - ☒ Trazamos una recta vertical por un punto cualquiera del eje de abscisas. El punto en que ésta corta a la parábola la ordenada y cumple la ecuación de la misma, es decir y = p, un punto por encima es mayor y uno por debajo es menor. Como nuestra inecuación, despejada la y, es $y > x^2 - 1$, los puntos que la cumplen son los del semiplano sombreado. La parábola no está incluida por ser la desigualdad estricta.

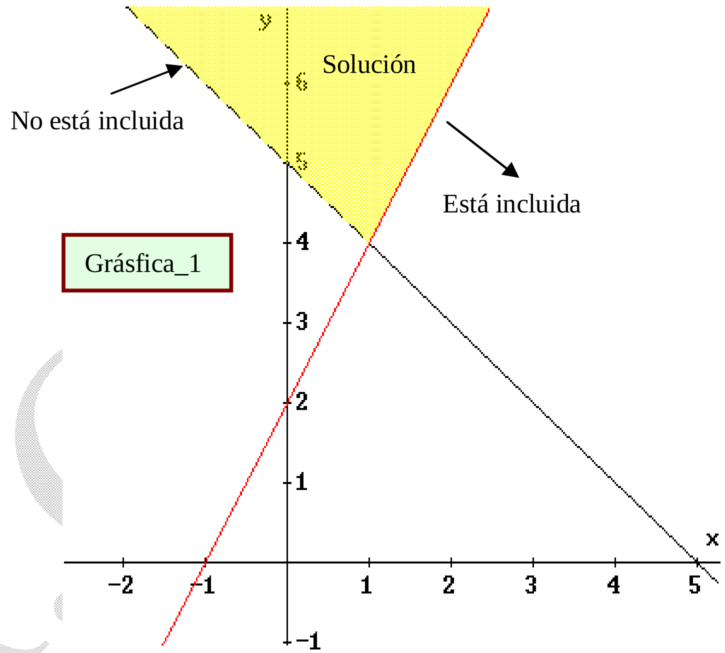


☑ **Sistemas de inecuaciones mixtas con dos variables:** son sistemas formados por una inecuación de primer grado y dos variables con otra de primer grado, también con dos variables. O bien ambas de segundo grado. O bien una de cada.

✓ **Sistemas de dos ecuaciones y dos variables de primer grado:** son de la forma $\boxed{\begin{cases} a_1x+b_1y<c_1 \\ a_2x+b_2y>c_2 \end{cases}}$, o cualquiera de sus variaciones.

➢ **Método de resolución:** dibujamos ambas rectas por separado. Buscamos los semiplanos que cada recta produce en el plano, y por último buscamos las zonas de intersección de ambos, o los puntos del plano que cumplen ambas desigualdades simultáneamente.

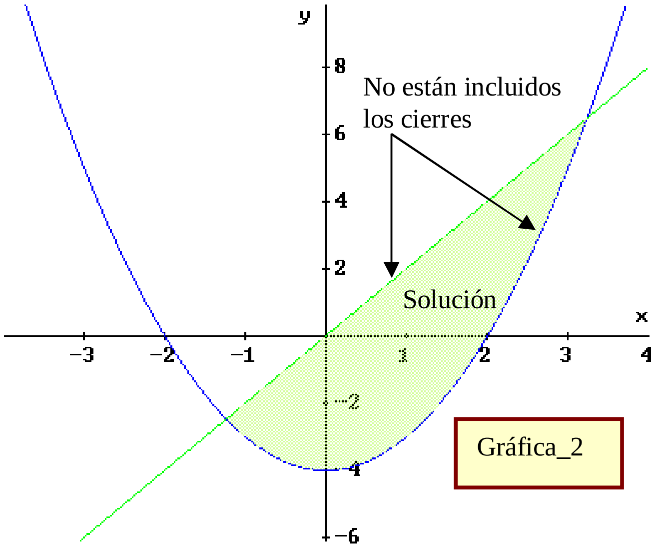
- **Ejemplo_1:** $\begin{cases} x+y\geq 5 \\ 2x-y<-2 \end{cases}$ la solución en la gráfica_1.



✓ **Sistemas de dos ecuaciones y dos variables, una de primer grado y la otra de segundo:** son de la forma $\boxed{\begin{cases} a_1x+b_1y<c_1 \\ d_1y+a_2x^2+b_2x+c_2>0 \end{cases}}$, o cualquiera de sus variaciones.

➢ **Método de resolución:** dibujamos la recta y la parábola en el mismo plano y buscamos la zona del plano común a ambas desigualdades.

- **Ejemplo_2:** $\begin{cases} x^2 - y < 4 \\ y < 2x \end{cases}$, la solución en la gráfica_2.

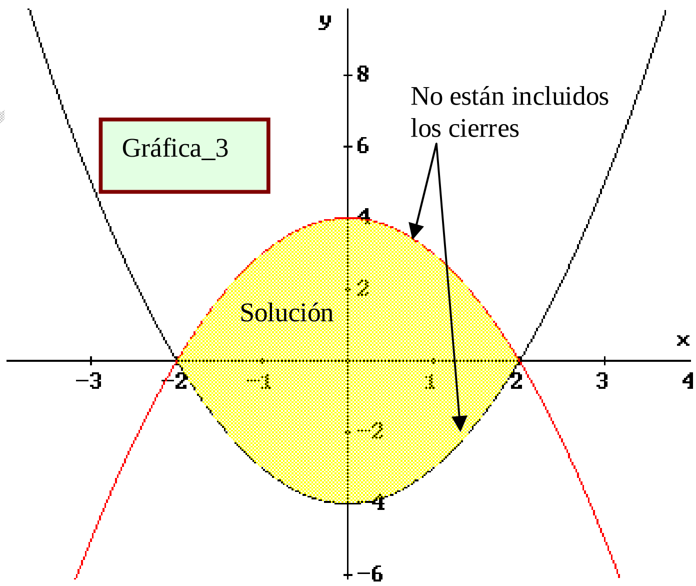


✓ **Sistemas de dos ecuaciones y dos variables, ambas de segundo grado:** son de la forma

$\boxed{\begin{cases} d_1y + a_1x^2 + b_1x + c_1 \le 0 \\ d_2y + a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0 \end{cases}}$, o cualquiera de sus variaciones.

➢ **Método de resolución:** dibujamos ambas parábolas y buscamos la zona del plano que cumple ambas desigualdades.

- **Ejemplo_3:** $\begin{cases} x^2 - y < 4 \\ y < -x^2 + 4 \end{cases}$, la solución en la gráfica_3.

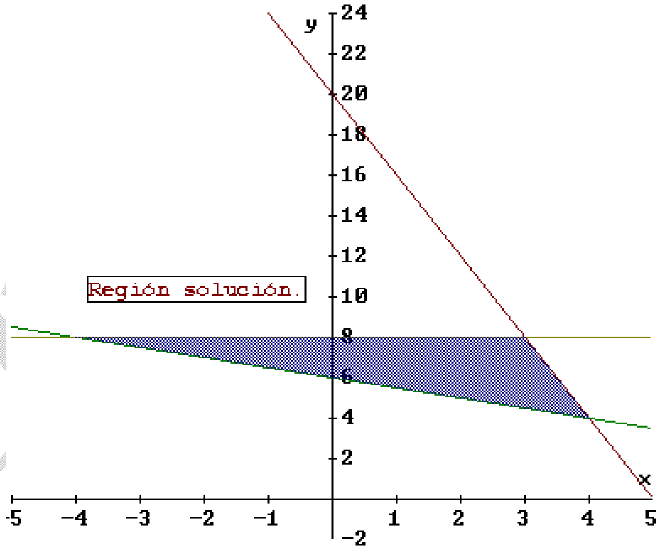


✓ **Sistemas de más de dos ecuaciones y dos variables de primer grado:** son de la forma

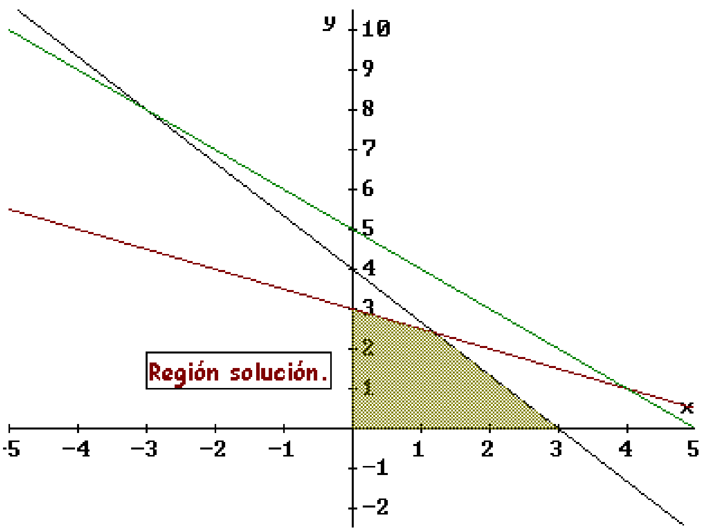
$$\begin{cases} a_1x+b_1y<c_1 \\ a_2x+b_2y>c_2 \\ a_3x+b_3y\le c_3 \\ \mathrm{M}\ \mathrm{M}\ \mathrm{M} \\ a_nx+b_ny\ge c_n \end{cases}$$
, o cualquiera de sus variaciones.

➢ **Método de resolución:** el mismo seguido hasta ahora, la dificultad estará solo en el número de ecuaciones que intervengan y en el orden y claridad que sigamos para ir dibujando las distintas regiones pertenecientes a cada inecuación por separado, para de este modo poder ver con claridad cual es la región común a todas ellas, conocida ésta como **región factible**.

- **Ejemplo_1:** $\begin{cases} 4x+y\le 20 \\ y\le 8 \\ x+2y\ge 12 \end{cases}$



- **Ejemplo_2:** $\begin{cases} 4x+3y\le 12 \\ x+2y\le 6 \\ x+y\le 5 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$



Actividades de aplicación.

P1.- Resolver las siguientes inecuaciones con dos incógnitas:

a) $x-2y<5 \Rightarrow$ b) $\frac{2y-3}{2} \le \frac{x-1}{3} \Rightarrow$ c) $3x+2y+5 \le 0 \Rightarrow$

d) $3x-2y<2 \Rightarrow$ e) $2x-3y \le 0 \Rightarrow$ f) $(x-3)\cdot(x-1) \le y \Rightarrow$

g) $(x-1)\cdot(x+2) \le y \Rightarrow$ h) $x^2-4x+3>y \Rightarrow$ i) $-x+2 \ge -y \Rightarrow$

P2.- Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas:

a) $\begin{cases} x+y \le 3 \\ 3x-3y \le 9 \end{cases} \Rightarrow$ b) $\begin{cases} x+y \le 3y-8 \\ y \ge 2x+4 \end{cases} \Rightarrow$ c) $\begin{cases} x-y+2 \ge 0 \\ x-1 \le y \end{cases} \Rightarrow$

d) $\begin{cases} x-3y+2<0 \\ 2x+y-3>0 \\ x+4y-12<0 \end{cases} \Rightarrow$ e) $\begin{cases} x \ge y \\ x+y \ge 0 \\ 2x-y+2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$ f) $\begin{cases} y \le 8 \\ 4x+y \le 20 \\ x+2y \ge 12 \end{cases} \Rightarrow$

g) $\begin{cases} 4x+3y \le 12 \\ x+2y \le 6 \\ x+y \le 5 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$ h) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 2x+3y \le 12 \\ 4x+9y \le 30 \end{cases} \Rightarrow$ i) $\begin{cases} 1-x<2-3x \\ 3+x<2+5x \end{cases} \Rightarrow$

j) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}-\frac{x+3}{2} \le x \\ \frac{4x-2}{4}-\frac{x-1}{3} \ge x \end{cases} \Rightarrow$ k) $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ y>x \\ x+2y \le 12 \end{cases} \Rightarrow$ l) $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ y<2-x \\ y<x+1 \end{cases} \Rightarrow$

m) $\begin{cases} x-3y+2<0 \\ 2x+y-3>0 \\ x+4y-12<0 \end{cases} \Rightarrow$ n) $\begin{cases} x \ge y \\ x+y \ge 0 \\ 2x-y+2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$ o) $\begin{cases} -2<x<2 \\ y>4 \\ x+y-1<0 \end{cases} \Rightarrow$

p) $\begin{cases} x^2-y \le 3-2x \\ x^2+y \le 4x \end{cases} \Rightarrow$ q) $\begin{cases} y+4x>x^2 \\ y-x<-1 \end{cases} \Rightarrow$ r) $\begin{cases} y \le x+1 \\ x^2 \le y+1 \\ y+x^2 \le x \end{cases} \Rightarrow$

s) $\begin{cases} x-3y+2>0 \\ 2x+y-3<0 \\ x+2y+4>0 \end{cases} \Rightarrow$ t) $\begin{cases} x-2y+3 \ge 0 \\ x+2y-3 \le 0 \\ -3x+y-3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow$ u) $\begin{cases} x+2y-7 \ge 0 \\ 2x-3y \ge 0 \\ 2x-y-4 \le 0 \end{cases} \Rightarrow$