Inecuaciones en $\mathbb{R}$

Introducción

☑ **Desigualdad:** se llama **desigualdad** a toda relación entre expresiones numéricas o algebraicas unidas por uno de los cuatro signos de desigualdad, $<,\ >,\ \leq,\ \geq$

- ✓ **Por ejemplo:**
  - ➢ $4+6\leq 10$; $(x-1)\cdot(x-2)\geq 0$; $1+4<8$, etc. ...
- ✓ **Las desigualdades en las que interviene una variable se denominan inecuaciones.**

☑ **Propiedades de las desigualdades:**

- ✓ **Se denominan también transformaciones de equivalencia.**
  - ➢ **Suma:** si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o resta una misma expresión o cantidad, la desigualdad no varía:
    - $a<b \Rightarrow a+c<b+c$
  - ➢ **Transposición:** consiste en restar a ambos miembros de la desigualdad una misma cantidad, pero de modo que uno de los términos de uno de los miembros desaparezca del mismo y aparezca en el otro miembro:
    - $a+b>c \quad \Rightarrow \quad a+b-b>c-b \quad \Rightarrow \quad a>c-b$
  - ➢ **Producto:** Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por una cantidad positiva, la desigualdad no varia, pero si la cantidad es negativa, entonces cambia el sentido de la desigualdad:
    - $a<b \Rightarrow -a>-b$, **al multiplicar por una cantidad negativa cambia el sentido de la desigualdad**.
    - $a>b,\ c>0 \Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$, si la cantidad es positiva se conserva el sentido original de la desigualdad.
  - ➢ **División:** si se dividen los dos miembros de una desigualdad por una cantidad no negativa y distinta de cero, la desigualdad no varía:
    - $a\cdot c\geq b\cdot c$, y $c>0 \Rightarrow \frac{a\cdot \cancel{c}}{\cancel{c}} \geq \frac{b\cdot \cancel{c}}{\cancel{c}} \Rightarrow a\geq b$
    - $\begin{cases} -a\leq b \Rightarrow a\geq -b\text{, ya que } -2\leq 3 \Rightarrow 2\geq -3 \\ -a\leq b \Rightarrow -7\cdot a\leq 7\cdot b \Rightarrow \frac{-\cancel{7}\cdot a}{-\cancel{7}} \geq \frac{\cancel{7}\cdot b}{-\cancel{7}} \Rightarrow a\geq -b \end{cases} \Rightarrow$, si el divisor es negativo entonces cambia el sentido de la desigualdad.

Inecuaciones

Son desigualdades en las que se encuentra presente en uno cualquiera de los miembros, o en ambos, una o más variables, o incógnitas.

- ✓ **Resolver una inecuación** consiste en hallar los valores numéricos para los cuales la desigualdad es verdadera.
- ✓ **Inecuaciones equivalentes**, son aquellas que tienen las mismas soluciones.
  - ➢ Para hallar inecuaciones equivalentes debemos aplicar los **principios de equivalencia**:

- **Si sumamos o restamos** a los miembros de una inecuación **una misma cantidad** o expresión algebraica, **la inecuación que resulta es equivalente a la dada**.
- **Si multiplicamos o dividimos** los dos miembros de una inecuación **por una misma cantidad positiva y no nula**, **la inecuación que resulta es equivalente a la dada**.
- **Si multiplicamos o dividimos** los dos miembros de una inecuación **por una misma cantidad negativa**, **la inecuación que resulta es de sentido contrario a la dada**.

- **Ejemplos:**
  - ☒ $x-2\leq 3x-5 \;\Rightarrow\; x-2-x+5\leq 3x-5-x+5 \;\Rightarrow\; 3\leq 2x$, es una inecuación equivalente a la primera.
  - ☒ $\frac{3}{2}x+1>2x-\frac{4}{3} \;\Rightarrow\; \frac{9x+6}{6}>\frac{12x-8}{6} \;\Rightarrow\; 9x+6>12x-8$, que es equivalente a la dada, y pasaríamos a otras inecuaciones equivalentes hasta llegar a la solución, en este caso $3x<14\Rightarrow x<\frac{14}{3}$, que es la solución, es decir, todos los valores de la variable menores que catorce tercios.

☑ Inecuaciones de primer grado

Son aquellas en las que las variables que intervienen están elevadas a un exponente igual a la unidad.

- ✓ **Inecuaciones de primer grado con una incógnita, tienen por expresión general $\boxed{ax+b<0}$, y todas sus equivalentes.**

  $ax+b\leq 0$; $ax+b>0$; $ax+b\geq 0$.
  - ➢ **Ejemplos:**

- **E1.-** $99x - 109 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{109}{99} \Rightarrow \forall x \in \left(-\infty, \frac{109}{99}\right]$, es decir, se cumple para todo valor de la variable x menor o igual que noventa y nueve cientonueveavos.
- **E2.-** $17x - 15 > 0 \Rightarrow x > \frac{15}{17} \Rightarrow \forall x \in \left(\frac{15}{17}, \infty\right)$, es decir, se cumple para todo valor de la variable estrictamente mayor que quince diecisieteavos.

➢ Luego para resolver una inecuación se sigue un proceso similar al de resolver ecuaciones.

✓ **Método analítico:**

➢ Para **resolver una inecuación de primer grado**, lo primero que hay que hacer es llegar a obtener la expresión general de una inecuación de 1er grado del apartado anterior aplicando los principios de equivalencia y los fundamentos del cálculo en general:

➢ **Quitar paréntesis** si los hubiera. Para ello **aplicar la propiedad distributiva** del producto respecto a la suma.

➢ **Quitar denominadores** si los hubiera. Para ello **reducir ambos miembros** a común denominador.

➢ **Reducir términos semejantes** en ambos miembros.

➢ Pasar a un miembro los términos que contengan la variable y al otro los que no la contengan, y volver a reducir términos. (Aplicar los **principios de equivalencia de inecuaciones**)

➢ **Despejar la variable**. (Volver a aplicar los **principios de equivalencia** de modo que la variable quede aislada en el 1er miembro y con coeficiente la unidad, 1)

➢ **IMPORTANTE:** si al aplicar los principios de equivalencia debemos **dividir o multiplicar** por una **cantidad negativa** tener presente que **cambia el sentido de la desigualdad**, así:

- $36 - 46x \geq 378x - 315 \Rightarrow -46x - 378x \geq -36 - 315 \Rightarrow 424x \leq 351$ ya que hemos tenido que multiplicar por –1 ambos miembros por ser éstos negativos, luego proseguiríamos de modo normal.

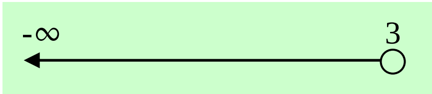
✓ **Ejemplos:**

➢ **E1.-** $4x - 7 < x + 2 \Rightarrow 4x - x < 2 + 7 \Rightarrow 3x < 9 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow \forall x \in (-\infty, 3)$, la solución son todos los valores de la variable menores estrictamente que 3.

- **E2.-** $\frac{3}{2}x+1>2x-\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{9x+6}{6}>\frac{12x-8}{6} \Rightarrow 9x-12x>-8-6$, como nos queda la variable negativa debemos multiplicar ambos miembros por –1, así $-3x>-14 \Rightarrow 3x<14 \Rightarrow x<\frac{14}{3} \Rightarrow \forall x \in \left(-\infty, \frac{14}{3}\right)$, la solución son todos los valores de la variable estrictamente menores que catorce tercios.

✓ **Modos de dar las soluciones:**

- **Algebraicamente:** Como expresión de una desigualdad $x<3$
- **Topológicamente o por intervalos**: $\forall x \in (-\infty, 3)$
- **Gráficamente**, por su representación en la recta real.



☑ Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita

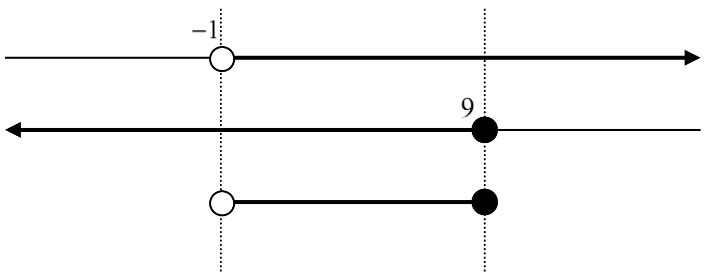
Son aquellos en los que la única variable que interviene en todas las ecuaciones está elevada a un exponente igual a la unidad.

✓ **Sistemas de dos ecuaciones, tienen por expresión general:**

- $\boxed{\begin{cases} a_1x<b_1 \\ a_2x<b_2 \end{cases}}$, y todas sus equivalentes $\begin{cases} a_1x<b_1 \\ a_2x>b_2 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1x\le b_1 \\ a_2x\ge b_2 \end{cases}$, etc. ...

✓ **Técnicas de resolución:** no existe más que un modo de resolverlos, independientemente del número de inecuaciones que compongan el sistema, se resuelve cada inecuación por separado, y al final se busca la solución en la intersección de todas ellas, es decir, el intervalo de solución común a todas.

- **Ejemplos:**
  - **E1.-** $\begin{cases} x+2>1 \\ 2x-5\le x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\le 9 \end{cases}$, los intervalos de solución son $(-1,\infty)$ para la primera y $(-\infty,9]$ para la segunda. Luego la solución común a ambas está en la intersección de ambos, es decir, en $(-1,9]$, gráficamente tal vez se vea mejor.

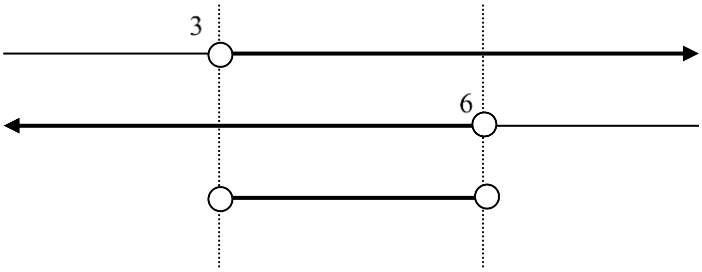


- **E2.-** Sea x el largo de un rectángulo de 3 cm. de ancho, el lado de un triángulo equilátero y el lado de un cuadrado. Determinar su valor para que el perímetro de rectángulo sea superior al del triángulo e inferior al del cuadrado.

  ☒ El planteamiento nos lleva a $3x < 2x + 6 < 4x$.
  Esta es una inecuación de primer grado que no podemos resolver directamente.

  Debemos pasar al sistema $\begin{cases} 3x < 2x + 6 \\ 2x + 6 < 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 6 \\ x > 3 \end{cases}$,

  la primera tiene por solución el intervalo $(-\infty, 6)$, y la segunda $(3, \infty)$, luego la solución común es la intersección de ambos, es decir $(3, 6)$.



☑ Inecuaciones en valor absoluto

Son aquellas en las que parte de la inecuación, o toda ella, viene afectada por un valor absoluto.

- ✓ **Expresión general:** $\boxed{|ax + b| \leq c}$, o todas sus equivalentes $|ax + b| \geq c$, o $|ax + b| > c$, etc. …
- ✓ **Método de resolución:** aplicamos la definición de valor absoluto de una cantidad y pasamos a un sistema de dos ecuaciones cuya solución es la solución de la inecuación.
  - ➢ $|ax + b| \leq c$ por definición $\begin{cases} ax + b \leq c \\ -(ax + b) \leq c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + b \leq c \\ ax + b \geq -c \end{cases}$, recuerda que al multiplicar los dos miembros de una desigualdad por una cantidad, negativa, cambia el sentido de la desigualdad.
  - ➢ $|ax + b| \geq c \Rightarrow ax + b \geq c$ ó $-(ax + b) \geq c$ La solución es la unión de las dos soluciones.
  - ➢ **Ejemplos:**

- **E1.-** $|2x - 1| < 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 < 2 \\ -(2x - 1) < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x < 3 \\ 2x - 1 > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ x > \dfrac{-1}{2} \end{cases}$, para la primera la solución es el intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y para la segunda $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, la solución de la inecuación inicial será la intersección de ambos, es decir, el intervalo $\left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

- **E2.-** $\left|\dfrac{2x+1}{x-2}\right| \geq 5 \iff \begin{matrix} \dfrac{2x+1}{x-2} \geq 5 \iff \dfrac{11-3x}{x-2} \geq 0 \\ -\dfrac{2x+1}{x-2} \geq 5 \iff \dfrac{7x-9}{x-2} \leq 0 \end{matrix}$, la solución de la primera es $\left(2, \dfrac{11}{3}\right]$ y la de la segunda, la solución de la inecuación inicial es la unión de ambas $\left(2, \dfrac{11}{3}\right] \cup \left[\dfrac{9}{7}, 2\right)$

☑ Inecuaciones factorizadas o de grado mayor que 1

Son inecuaciones en las que la variable está elevada a un exponente mayor que la unidad.

- ✓ **Expresión general:** son todas del tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 < 0$, o similares.
- ✓ **Método de resolución:** descomponer factorialmente el polinomio, aplicando Ruffini, complitud de cuadrados, etc. … el método que consideres más apropiado o que mejor te resulte.
- ✓ **Ejemplos:**
  - ➢ **E1.-** $2x^2 < 3 - 5x$, pasamos todos los término a un único miembro:
    - $2x^2 + 5x - 3 < 0$, ahora descomponemos el polinomio que nos resulte, en este caso $2x^2 + 5x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = -3 \end{cases} \;\Rightarrow\; 2\left(x - 1/2\right) \cdot (x+3)$, y

      pasamos a la inecuación $2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x+3) < 0$, que podemos leer como,

      ¿Cuándo el producto de dos números es negativo?.

      Decimos dos ya que el signo del factor 2 es siempre el mismo y positivo, y por tanto no va a influir en el resultado final.

      La respuesta es cuando ambos tienen signos contrarios.

      ¿Cómo averiguar el signo de un binomio?.

      - ☒ Una expresión de primer grado en x no es más que la ecuación de una recta, en este caso se trata de dos rectas $r_1 \equiv y = x - \dfrac{1}{2}$, y $r_2 \equiv y = x + 3$.

        Sabemos, o deberíamos saber que si la pendiente de la recta es positiva ésta toma valores positivos a la derecha del punto de corte con el eje de abscisas, y negativos a su izquierda. En nuestro caso ambas tienen pendiente positiva, ¿Por qué?. Porque el coeficiente de la x es precisamente la pendiente de la recta y ambos son positivos. Los puntos de corte con el eje de abscisas son los valores de x que hacen que y = 0, en nuestro caso son $\frac{1}{2}$ y -3, luego

$\left(x-\frac{1}{2}\right)$ toma valores positivos a la derecha de $\frac{1}{2}$ y $(x+3)$ a la derecha de -3, así:

	-3	$\frac{1}{2}$	
$x-\frac{1}{2}$	—	—	+
$x+3$	—	+	+
$2(x-\frac{1}{2})\cdot(x+3)$	+	—	+
	No es solución	Solución	No es solución

Luego la solución será el intervalo indicado, donde el signo del producto es negativo.
Como la desigualdad es estricta, el intervalo será abierto $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$.

En la práctica estudiamos los puntos donde el polinomio de la inecuación se anula y su signo entre ellos dando valores reales

	-3	1/2	
$2(x-\frac{1}{2})\cdot(x+3)$	+	—	+

- **E2.-** $x^3-2x^2\le -x^2+2x \Rightarrow x^3-x^2-2x\le 0$, descomponiendo factorialmente $x^3-x^2-2x=x\cdot\left(x^2-x-2\right)=x\cdot(x+1)\cdot(x-2)$, y pasamos a la inecuación $x\cdot(x+1)\cdot(x-2)\le 0$. En este caso tenemos tres factores, y por lo tanto, tres rectas a estudio. Haciendo lo mismo de antes:

	-1	0	2	
x	—	—	+	+
$x+1$	—	+	+	+
$x-2$	—	—	—	+
x(x+1)(x-2)	—	+	—	+
	Solución	No es solución	Solución	No es solución

Ahora la solución, además de los intervalos, por no ser una desigualdad estricta, debemos incluir los extremos de los mismos, así, la solución será $(-\infty,-1]\cup[0,2]$.

Resumido:

	-1	0	2	
$x(x+1)\cdot(x-2)$	—	+	—	+

☑ Inecuaciones fraccionarias

Son inecuaciones en las que tenemos una fracción algebraica formando parte de la misma.

- ✓ **Expresión general:** son del tipo $\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} \leq 0}$, o todas sus equivalentes $\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0}$,….
- ✓ **Método de resolución:** descomponer factorialmente los polinomios numerador y denominador, aplicando Ruffini, complitud de cuadrados, etc. … el método que consideres más apropiado o que mejor te resulte.

  Una vez descompuestos si simplificas hay que tener cuidado de no perder soluciones.

  Posteriormente **se procede como con las inecuaciones de grado mayor que uno**, ya que se trata en el fondo de averiguar el signo final que va a tener un cociente de productos de binomios.

  Con la salvedad que los ceros del polinomio denominador nunca pueden ser solución.
- ✓ **Ejemplos:**

  - **E1.-** $\frac{x+2}{x\cdot(x-1)} > 0$, en este caso ya tenemos el numerador y el denominador descompuestos en factores, solo hay que construir la tabla de los signos, así:

Resumido

	-2	0	1	
$(x+2)/x.(x-1)$	−	+	−	+

Al tratarse de una desigualdad estricta no se incluyen los límites o extremos de los intervalos en la misma, así pues la solución será $(-2,0)\cup(1,\infty)$.

  - **E2.-** $\frac{x+1}{x-1} < 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} - 1 < 0$, ojo, si pasamos multiplicando el denominador al otro miembro estaríamos cometiendo un error. Resuelve por tu cuenta la inecuación $x+1 < x-1$ y compara los resultados. Para nuestro caso, operando $\frac{x+1}{x-1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1} < 0$, y todo se reduce a averiguar cuál es el signo del denominador, cuándo éste es negativo, y lo es en $(-\infty,1)$.

  - **E3.-** $\frac{1-x^2}{x+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)\cdot(1-x)}{(x+1)} \geq 0$, si simplificamos nos queda $1 - x \geq 0$ pero hay que tener en cuenta que $x + 1 \neq 0$

    La solución, por tratarse de una desigualdad no estricta, es $(-\infty, -1) \cup (-1, 1]$.

Actividades de aplicación.

P1.- Resolver las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $3-x<2+5x \Rightarrow$ b) $1+x>2-3x \Rightarrow$ c) $2\cdot(3x-3)>6 \Rightarrow$

d) $3\cdot(3-2x)<2\cdot(3+x) \Rightarrow$ e) $2\cdot(x+3)+3\cdot(x-1)>2\cdot(x+2) \Rightarrow$

f) $\frac{3x-3}{5}-\frac{4x+8}{2}\le\frac{x}{4}-3x \Rightarrow$ g) $2\cdot(3+x)\ge\frac{8+x}{3} \Rightarrow$

h) $\frac{x+1}{2}-3x\le\frac{1-5x}{3}+4 \Rightarrow$ i) $\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{3}\le\frac{3}{15}\cdot(3x+2)+\frac{4\cdot(1-x)}{3} \Rightarrow$

j) $\frac{3-\frac{x}{3}}{3+\frac{1}{2}}-x\ge\frac{3x-\frac{5}{2}}{1-\frac{2}{3}} \Rightarrow$ k) $\frac{3-\left(\frac{x-2}{4}+x\cdot\left(\frac{x-3}{2}-x\right)\right)}{2-\frac{3}{2}}\le(x-2)\cdot(x-3) \Rightarrow$

P2.- Resolver las siguientes inecuaciones de grado mayor que uno o fraccionarias:

a) $-5x^2+3x+8<0 \Rightarrow$ b) $25x^2-101x+102<0 \Rightarrow$

c) $x\cdot(x+5)>2x^2 \Rightarrow$ d) $\frac{2x+5}{x-4}\ge 0 \Rightarrow$ e) $\frac{-5x-6}{3x-2}\le 0 \Rightarrow$

f) $(81-x)\cdot(4-x)>x+11 \Rightarrow$ g) $(x-1)^2>9 \Rightarrow$

h) $2\cdot(-x+1)^2\ge -2x^2+3 \Rightarrow$ i) $(x^2-9)\cdot(x+1)\ge 0 \Rightarrow$

j) $(1-x^2)\cdot(x^2-9)\le 0 \Rightarrow$ k) $\frac{(x-4)\cdot(x-2)\cdot(1-x)}{(x+3)\cdot(x+1)}\ge 0 \Rightarrow$

l) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right|\le 4 \Rightarrow$ m) $\left(\frac{3x+2}{2}+2\right)^2+\left(\frac{x-1}{3}-\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{3}+\frac{x}{2}\right)\ge 0 \Rightarrow$

n) $x^3-5x^2+6x\le 0 \Rightarrow$ o) $(x-1)\cdot(x^2-4x+3)>0 \Rightarrow$

p) $(x^2-1)\cdot(x^2+1)\le 0 \Rightarrow$ q) $x^3-x^2-4x+4<0 \Rightarrow$

r) $\frac{x^2-1}{x+3}\ge 0 \Rightarrow$ s) $(x-1)^3\cdot(x-1)^2\cdot(x-2)>0 \Rightarrow$

t) $\frac{x^2-9}{x-1}\ge 0 \Rightarrow$ u) $\frac{2x+3}{x-1}\le 2 \Rightarrow$

u) $\dfrac{(3x-1)\cdot(x^2-2x-8)}{(x^2+9)\cdot(2-5x)\cdot(x+1)} \leq 0 \Rightarrow$

v) $\dfrac{(x+3)\cdot\left(x-\dfrac{2}{5}\right)}{4-x} \leq 0 \Rightarrow$

w) $\dfrac{(x-4)\cdot(x-2)\cdot(1-x)}{(x+3)\cdot(x+1)} \geq 0 \Rightarrow$

x) $\dfrac{x^2-3x+2}{6-x^2+x} \leq 0 \Rightarrow$

y) $\dfrac{x\cdot(x-1)\cdot(x+3)}{(x^2-4)\cdot(x+5)} \geq 0 \Rightarrow$

z) $\dfrac{(x-3)\cdot(x+3)\cdot x}{(2-x)\cdot(x+1)} \leq 0 \Rightarrow$

P3.- Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} 2x-3 > x-2 \\ 3x-7 < x-1 \end{cases} \Rightarrow$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{5} < 8 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{4x}{9} < 5 \end{cases} \Rightarrow$

c) $\begin{cases} 2x-3 \leq 3x+7 \\ \dfrac{2x}{5}-\dfrac{x}{4} \geq \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$

d) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x+3}{2} \leq x \\ \dfrac{4x-2}{4}-\dfrac{x-1}{3} \geq x \end{cases} \Rightarrow$

e) $\begin{cases} (x-1)^2-(x+3)^2 \leq 0 \\ x-3\cdot(x-1) \geq 3 \end{cases} \Rightarrow$