DERIVADAS

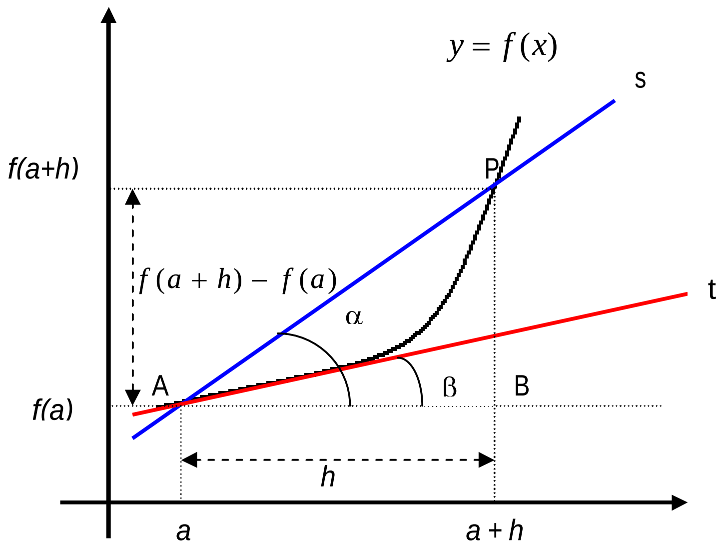
Definición de derivada.

La derivada de una función *f* en el punto de abscisa x = *a*, se define como el siguiente límite, si existe:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A la derivada de una función en un punto se le llama también tasa de variación instantánea.

Interpretación geométrica de la derivada



La recta secante **s**, corta a la curva *y = f(x)*, en los puntos *A* y *P*.

Su pendiente es: $tg\alpha = \frac{PB}{AB} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Si el punto *P* se va acercando al punto *A*, hasta confundirse con él, la recta secante *s*, se transforma en la recta tangente *t* y el ángulo α se transforma en el ángulo β, es decir,

Cuando $P \to A$, que es equivalente a decir que $h \to 0$, el límite de la recta secante *s*, es la recta tangente *t*

Pero cuando $\alpha \to \beta, tg\alpha \to tg\beta$ que es equivalente a $\lim_{h \to 0} tg\alpha = tg\beta$

Por tanto, $tg\beta = \text{pendiente de t} = \lim_{h \to 0} tg\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Queda probado que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

Ecuación de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.

Para halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = a$, procedemos de la forma siguiente:

- Hallamos el valor de la función en dicho punto, *f(a)* con lo que obtenemos el punto por donde pasa la recta tangente: $(a, f(a))$
- Calculamos la pendiente de la recta que es el valor de la derivada en el punto considerado: $m = f'(a)$
- Aplicamos la fórmula de la ecuación punto – pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, es decir, $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Ejemplo :

Dada la función $f(x) = x^2$, halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x = 2.

- Hallamos el valor de la función en x = 2 punto, *f(2)=4* con lo que obtenemos el punto por donde pasa la recta tangente: $(2,4)$
- Calculamos la pendiente de la recta que es el valor de la derivada en el punto considerado: $m = f'(2)$

$$m = f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$$

- Aplicamos la fórmula de la ecuación punto – pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, es decir, $y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = 4(x - 2)$

Ejemplo :

Ecuación de recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 3x + 1$, en el punto de abscisa x = 4

- Para x = 4, $f(4) = 4^2 - 3.4 + 1 = 5$. La recta pasa por el punto $(4,5)$
- $f'(x) = 2x - 3; \quad m = f'(4) = 2.4 - 3 = 5$
- $y - y_0 = m(x - x_0)$, por tanto, $y - 5 = m(x - 4)$ es la recta buscada.

Función derivada.

La derivada de una función en un punto de abscisa x = a, asigna a dicho punto un número real, que es el valor de la derivada en dicho punto.

También podemos considerar una función que asocie a cada punto x, el valor de la derivada en ese punto. Recibe el nombre de función derivada o simplemente derivada.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivadas de operaciones con funciones.

Aplicando la definición de derivada se obtienen las siguientes fórmulas:

Derivada de una suma o diferencia: $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

Derivada de un producto: $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Derivada de un cociente: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

Ejemplo :

Sean las funciones $f(x) = x^2$; $g(x) = 4x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

es decir,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h) - 4x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h}{h} = 4$$

Si sumamos las funciones y hallamos la derivada de la suma, resulta:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 4x$$

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

es decir,

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 4(x+h) - x^2 - 4x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h + 4) = 2x + 4$$

resultado que es la suma de las derivadas de las funciones por separado.

Derivada de una función compuesta: Regla de la cadena.

Sea la función compuesta $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = \frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{h} = \frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{f(x+h) - f(x) \to 0} \frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{f(x+h) - f(x)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'[f(x)].f'(x)$$

es decir, la derivada de la composición de f y g es el producto de la derivada de g en el punto $f(x)$ multiplicada por la derivada de f en el punto x.

$$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)].f'(x)$$

Cálculo de derivadas.

Aplicando la definición, a través del límite, y teniendo en cuenta la regla de la cadena, se obtienen las derivadas de las siguientes funciones:

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Constante	y = k	y'=0
Identidad	y =x	y'=1
Tipo potencial	$y = x^a$	$y' = a\cdot x^{a-1}$
	$y = \left[f(x)\right]^a = f^a(x)$	$y' = a\cdot f^{a-1}(x).f'(x)$

Ejemplos:

- $y = x^4;\quad y' = 4x^3$
- $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2};\quad y = \frac{x^{1/2}}{x^2} = x^{1/2}.x^{-2} = x^{-3/2} = \frac{1}{x\sqrt{x}};$

  $y' = \frac{-3}{2}.x^{\frac{-3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2}.\frac{1}{x^{5/2}} = -\frac{3}{2}.\frac{1}{\sqrt{x^5}} = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$
- $y = (3x^2-2)^5;\quad y' = 5(3x^2-2)^4.(3x^2-2)' = 30x(3x^2-2)$
- $y = \sqrt[3]{x^2-3};\quad y = (x^2-3)^{1/3};$

  $y' = \frac{1}{3}(x^2-3)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(x^2-3)' = \frac{1}{3}(x^2-3)^{-2/3}\cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}$
- $y = \frac{1}{(2x+5)^2};\quad y = (2x+5)^{-2};$

  $y' = -2(2x+5)^{-3}.(2x+5)' = -2(2x+5)^{-3}.2 = \frac{-4}{(2x+5)^3}$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo raíz cuadrada	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

Ejemplo:

- $y = \sqrt{x^2-3x};\qquad y' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo exponencial	$y=e^{x}$	$y'=e^{x}$
	$y=e^{f(x)}$	$y=e^{f(x)}.f'(x)$
	$y=a^{x}$	$y=a^{x}.\ln a$
	$y=a^{f(x)}$	$y=a^{f(x)}.\ln a.f'(x)$

Ejemplos:

- $y=e^{-x}$; $\quad y'=e^{-x}.(-1)=-e^{-x}$
- $y=e^{3x+2}$; $\quad y'=e^{3x+2}.(3x+2)'=e^{3x+2}.3=3e^{3x+2}$
- $y=2^{x}$; $\quad y'=2^{2x}.\ln 2$
- $y=5^{x^2+1}$; $\quad y'=5^{x^2+1}.(x^2+1)'.\ln 5=2x.5^{x^2+1}.\ln 5$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo logarítmico	$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$
	$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
	$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}.\log_a e=\dfrac{1}{a\ln a}$
	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}.\log_a e=\dfrac{f'(x)}{f(x)}.\dfrac{1}{\ln a}$

Ejemplos:

- $y=\ln(2x^3+5x)$; $\quad y'=\dfrac{(2x^3+5x)'}{2x^3+5x}=\dfrac{6x^2+5}{2x^3+5x}$
- $y=\log_2 x$; $\quad y'=\dfrac{1}{x}.\log_2 e$
- $y=\log_3(4x+1)$; $\quad y'=\dfrac{(4x+1)'}{4x+1}.\log_3 e=\dfrac{4}{4x+1}.\log_3 e=\dfrac{4.\log_3 e}{(4x+1)}$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo seno	$y = senx$	$y' = \cos x$
	$y = senf(x)$	$y' = \cos f(x).f'(x)$

Ejemplos:

- $y = sen(4x-1)$; $y' = \cos(4x-1).(4x-1)' = 4\cos(4x-1)$
- $y = sen^3 x$; $y = (sen\ x)^3$; $y' = 3(sen\ x)^2.(sen\ x)' = 3sen^2 x.\cos x$
- $y = sen\ x^2$; $y' = \cos x^2.(x^2)' = 2x\cos x^2$
- $y = sen^2(2x^3+2x)$; $y = [sen(2x^3+2x)]^2$;
  $y' = 2sen(2x^3+2x).[sen(2x^3+2x)]' = 2sen(2x^3+2x).\cos(2x^3+2x).(6x^2+2)$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo coseno	$y = \cos x$	$y' = -senx$
	$y = \cos f(x)$	$y' = -senf(x).f'(x)$

Ejemplos:

- $y = \cos 5x$; $y' = sen5x.(5x)' = -5sen5x$
- $y = \cos\sqrt{x}$; $y' = -sen\sqrt{x}.(\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}sen\sqrt{x} = -\frac{sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo tangente	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$
	$y = \mathrm{tg}\ f(x)$	$y' = \frac{1}{\cos^2 f(x)}.f'(x)$

Ejemplos:

- $y = tg5x$; $y' = \frac{1}{\cos^2 5x}.(5x)' = \frac{5}{\cos^2 5x}$
- $y = tg^2 x$; $y = (tg\ x)^2$; $y' = 2tg\ x.(tg\ x)' = 2tg\ x.\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2tg\ x}{\cos^2 x}$

TIPO	FUNCIÓN	DERIVADA
Tipo cotangente	$y = ctgx$	$y' = \frac{-1}{sen^2 x}$
	$y = ctgf(x)$	$y' = \frac{-1}{sen^2 f(x)}.f'(x)$

Ejemplos:

- $y = ctg\ x^2$; $y' = \frac{-1}{sen^2 x^2}.(x^2)' = \frac{-2x}{sen^2 x^2}$
- $y = ctg\ e^x$; $y' = \frac{-1}{sen^2 e^x}.(e^x)' = \frac{-e^x}{sen^2 e^x}$

Ejercicios resueltos

1.- Deriva las siguientes funciones:

a) $y = x^3(2x-1)^5$; b) $y = \dfrac{2x+1}{2x-1}$; c) $y = \dfrac{2}{x^3+x}$

Solución:

a) $y = x^3(2x-1)^5$

$$y' = 3x^2(2x-1)^5 + 5(2x-1)^4.2.x^3 = 3x^2(2x-1)^5 + 10x^3(2x-1)^4$$

b) $y = \dfrac{2x+1}{2x-1}$

$$y' = \frac{2(2x-1)-2(2x+1)}{(2x-1)^2} = \frac{4x-2-4x-2}{(2x-1)^2} = \frac{-4}{(2x-1)^2}$$

c) $y = \dfrac{2}{x^3+x} = 2(x^3+x)^{-1}$

$$y' = -2(x^3+x)^{-2}(3x^2+1) = \frac{-2(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$$

2.- Halla las derivadas de las funciones siguientes:

$f(x) = \ln(4x+1)$, $g(x) = \cos(3x+1)^2$ y $h(x) = senx\cos 2x$

Solución:

$f(x) = \ln(4x+1)$

$$f'(x) = \frac{4}{4x+1}$$

$g(x) = \cos(3x+1)^2$

$$g'(x) = -sen(3x+1)^2.[(3x+1)^2]' = -sen(3x+1)^2.2(3x+1).3 = -6(3x+1)sen(3x+1)^2$$

$h(x) = senx\cos 2x$

$$h'(x) = \cos x\cos 2x + (-sen2x.2)senx = \cos x\cos 2x - 2sen2xsenx$$

3.- Demuestra, aplicando la definición, que la derivada de una constante es 0.

Solución:

Sea la función constante $f(x) = k$

Como la función es constante, $f(x+h) = k$

Entonces,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to o} 0 = 0$$

4.- Halla la derivada de la función $y = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Solución:

Antes de derivar es conveniente desarrollar la expresión logarítmica:

$$y = \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Teniendo en cuenta el logaritmo de un cociente, $y = \ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1)$

Y ahora derivamos;

$$y' = \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{4x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

5.- Deriva y simplifica: $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$

Solución:

Aplicando la fórmula de la derivada de un cociente,

$$y' = \frac{2.(x+1)^2 - 2(x+1).2x}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)[2(x+1) - 4x]}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1) - 4x}{(x+1)^3} = \frac{2 - 2x}{(x+1)^3}$$

6.- Deriva y simplifica: $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Solución:

$$y' = \frac{(e^x + e^{-x})'.(e^x - e^{-x}) - (e^x - e^{-x})'.(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

Realizando las operaciones del numerador,

$$y' = \frac{e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x} - (e^{2x} + 1 + 1 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} - e^{2x} - 2 - e^{-2x}}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

7.- Deriva y simplifica la función $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Solución:

Antes de derivar desarrollamos el logaritmo:

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) = \frac{1}{2}\ln(1+\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1-\cos x)$$

Y ahora derivamos:

$$y' = \frac{1}{2}.\frac{-senx}{1+\cos x} - \frac{1}{2}.\frac{senx}{1-\cos x} = \frac{1}{2}\left(\frac{-senx}{1+\cos x} - \frac{senx}{1-\cos x}\right) = \frac{1}{2}.\frac{-senx + sen.\cos x - senx - senx\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

es decir, $y' = \dfrac{1}{2}.\dfrac{-2senx}{1-\cos^2 x} = \dfrac{-senx}{sen^2 x} = -\dfrac{1}{senx}$

8.- Halla la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 + x + 1$ en el punto de abscisa x = 2. Escribe la ecuación de dicha recta.

Solución:

La pendiente es el valor de la derivada: $f'(x) = 2x + 1$

Pendiente: $m = f'(2) = 2.2 + 1 = 5$

Ecuación de la recta: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Necesitamos las coordenadas del punto: Para $x = 2$, $f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$;$P(2, 7)$

La ecuación de la recta es, por tanto, $y - 7 = 5(x - 2)$

Ejercicios propuestos

1.- Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$; b) $g(x)=\dfrac{3}{(x-5)^2}$: c) $h(x)=5^{3x^2+2x-1}$

2.- Deriva y simplifica: $y=\dfrac{2x+3}{(x+5)^2}$

3.- Deriva las siguientes funciones logarítmicas:

$y=\ln(2x^2-3x+1)$; $y=\ln\sqrt{2x-3}$; $y=\log_2(x^2-5x+6)$

4.- Deriva y simplifica: $y=\ln\dfrac{1+senx}{1-senx}$

5.- Calcula:

a) Derivada de $f(x)=x^4+4x-1$ en el punto de abscisa $x = 1$

b) Derivada de $f(x)=\ln(x+3)$ en $x = 2$

c) Derivada de $f(x)=\cos(5x+4)$ en $x = \pi$

6.- Deriva la función $y=\sqrt[3]{(5x-3)^2}$

7.- El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $s(t)=3t^2-t+1$donde s se mide en metros y t en segundos. Calcula la velocidad en el instante $t = 2$ segundos.

8.- Deriva y simplifica:

$y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

$y=\dfrac{senx}{1+\cos x}$