

# LÍMITES

Lo primero, sustituir la variable por el valor al que tiende.

Si queda una indeterminación, aplicar:

Indeterminación	Método	Ejemplo
$\frac{k}{0}$	Se hacen los límites laterales para ver el signo y poder decir si va a $+\infty$ ó a $-\infty$ .	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{0} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2}$ <p>Para que se haya límite, deben existir los límites laterales y coincidir.</p>
$\frac{\infty}{\infty}$	<p>Fijarnos en el mayor grado del infinito:</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \text{signo} \left( \frac{a_n}{b_m} \right) \cdot \infty, & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n < m \end{cases}$ <p>También, se puede dividir numerador y denominador entre <math>x^{\text{mayor exponente}}</math>.</p>	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^3 - x + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{4x} = \frac{3}{\infty} = 0$ <p>Otra forma:</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^3 - x + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3}}{\frac{4x^3 - x + 4}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}} = \frac{0}{4} = 0$
$\frac{0}{0}$	Factorizar ya que numerador y denominador tienen como raíz común el valor al que tiende la variable y simplificar el factor que tienen en común.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x-1)}{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$
$0 \cdot \infty$	Expresarlo como $\frac{\infty}{\infty}$ ó $\frac{0}{0}$ y aplicar el método correspondiente.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x - 3} \cdot \frac{x - 1}{3x^2 - x + 2} = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + \dots}{6x^3 + \dots} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3}}{6\cancel{x^3}} = \frac{1}{6}$



$\infty - \infty$	<p><u>Con fracciones</u>: hacer la resta aplicando el mínimo común múltiplo.</p> <p><u>Con radicales</u>: multiplicar numerador y denominador por el conjugado. (Este método se aplica en cualquier indeterminación que tenga raíces cuadradas, de forma que se eliminen y se pueda aplicar el método que corresponda a esa indeterminación).</p>	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 1}{x^2} - \frac{x^2}{x + 3} \right) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^3 + 1) \cdot (x + 3) - x^4}{x^2 \cdot (x + 3)} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^4} + 3x^3 + \dots - \cancel{x^4}}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} = 3$ $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - (x)^2}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = \frac{1}{\infty} = 0$
$1^\infty$	<p>Teniendo en cuenta que <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e</math>, se aplica la fórmula:</p> <p><math>e^{\lim [(\text{base}-1) \cdot \text{exponente}]}</math></p>	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 5}{3x - 2} \right)^{2x^2} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 5}{3x - 2} - 1 \right) \cdot 2x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 5 - 3x + 2}{3x - 2} \right) \cdot 2x^2} =$ $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-3}{3x - 2} \right) \cdot 2x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-6x^2}{3x - 2} \right)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

Recuerda que:

$$k^\infty = \begin{cases} \infty, & \text{si } k > 1 \\ 0, & \text{si } 0 < k < 1 \end{cases}$$

$$\frac{k}{\infty} = 0$$

$$\frac{0}{k} = 0$$

$$\infty + \infty = \infty \cdot \infty = \infty^\infty = \infty$$

$$k^{-\infty} = \frac{1}{k^\infty}$$

$k$  indica un número

