REPRESENTACIÓN DE CURVAS - CCSS

Esquema

Para representar gráficamente una función se debe estudiar:

1. Dominio
2. Puntos de corte con los ejes coordenados
3. Paridad y periodicidad
4. Asíntotas
5. Monotonía
6. Curvatura

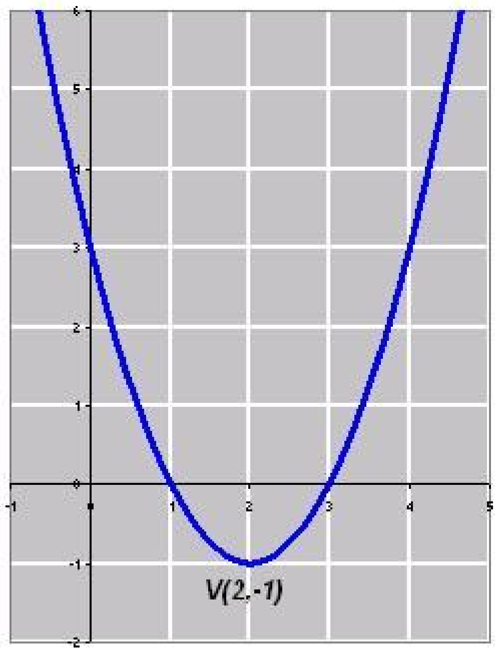
Función polinómica de segundo grado.

Su gráfica es una parábola. Para representarla basta con halla los puntos de corte a los ejes y el vértice que es siempre un máximo o un mínimo. Si el coeficiente de x^2 es positivo la parábola es cóncava positiva y si es negativo es cóncava negativa.

Cuando no existen puntos de corte con el eje de abscisas podemos ayudarnos con una sencilla tabla de valores.

Ejemplo 1

Gráfica $y = x^2 - 4x + 3$



Puntos de corte a los ejes:

- Para $x = 0$, $y = 3 \Rightarrow$ La función corta al eje de ordenadas en el punto *(0, 3)*
- Para $y = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Los puntos de corte al eje de abscisas son *(3, 0)* y *(1, 0)*

Vértice: $y = x^2 - 4x + 3$; $y' = 2x - 4$; $y'' = 2$

$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$. El eje de simetría de la parábola es la recta $x = 2$.

Para $x = 2$, $y(2) = 2^2 - 4.2 + 3 = -1$

$V(2,-1)$. El vértice es un mínimo ya que la segunda derivada es positiva.

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$ y creciente en $(2, +\infty)$

Funciones polinómicas en general

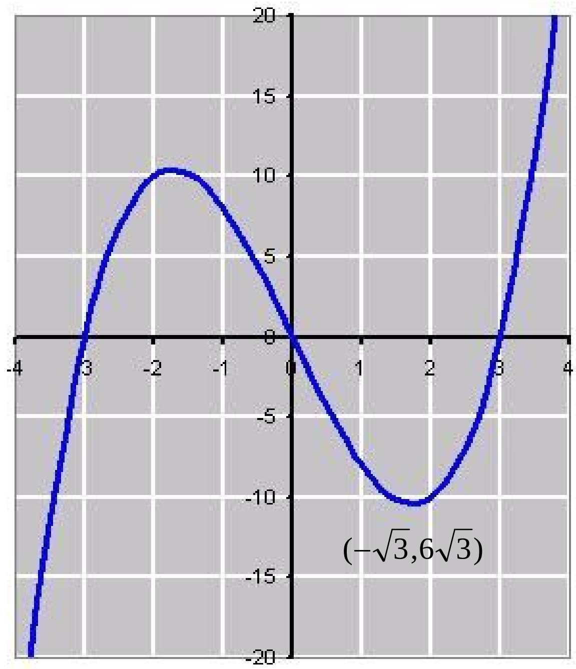
Se siguen los siguientes pasos:

1. **Dominio: *Dom(f) = R*. El dominio de toda función polinómica es siempre R.**
2. **Puntos de corte con los ejes de coordenadas.**
3. **Paridad y periodicidad**
4. **Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos**
5. **Concavidad . Puntos de inflexión.**

Nota: las funciones polinómicas no tienen asíntotas

Ejemplo 2.

Gráfica $f(x) = x^3 - 9x$



1.- Dominio: El dominio es R; *Dom(f) = R*

2.- Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

Para $x = 0, y = 0$

Para $y = 0$, $x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

Los puntos de corte son *(0, 0), (3, 0)* y *(-3, 0)*.

3.- Paridad:

$$f(-x) = (-x)^3 - 9(-x) = -x^3 + 9x = -f(x)$$

impar (simétrica respecto del origen)

4.- Crecimiento y decrecimiento: $f'(x) = 3x^2 - 9 ; \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Intervalos	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
Signo de y’	+	-	+
Función	↗	↘	↗

Para $x = -\sqrt{3}$ $\exists$ Máximo($-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}$); Para $x = \sqrt{3}$ $\exists$ Mínimo($\sqrt{3}, -6\sqrt{3}$)

5.- Curvatura: $f''(x) = 6x ; 6x = 0 \Rightarrow x = 0.$

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo de y’’	-	+
Función	∩	∪

Para $x = 0$, existe punto de inflexión *(0, 0)*

Funciones racionales

Se deben de realizar los seis pasos

Ejemplo 3

Gráfica $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

1.- Dominio: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ $Dom(f) = R - \{1\}$

2.- Cortes con los ejes

Para $x = 0$, $y = -2$

Para $y = 0$, $x^2 - 2x + 2 = 0$ *(que no tiene sol real.)*

Único punto de corte: *(-2, 0)*

3.- Paridad y simetría: no tiene

4.- Asíntotas:

Horizontales: No hay

Verticales $x = 1$ (A.V.)

Oblicuas: $y = mx + n$; $m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1$

$$n = \lim_{x \to \infty}(y - mx) = \lim_{x \to \infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-x + 2}{x - 1} = -1; \; y = x - 1 \text{ (A.O.)}$$

5.- Crecimiento y decrecimiento: $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0; \; x = 2$

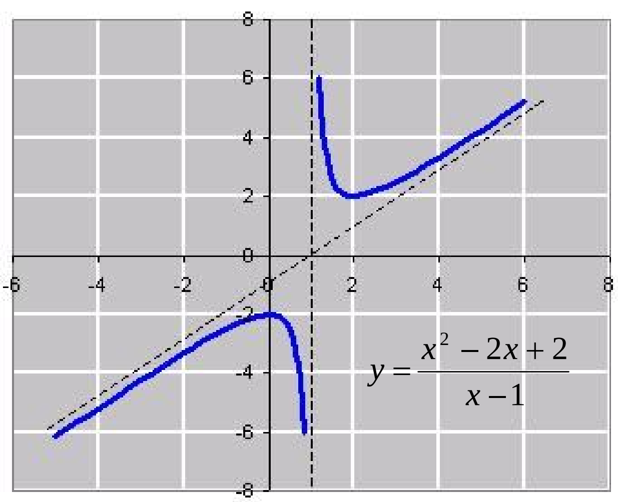
	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
y'	+	-	-	+
y	↗	↘	↘	↗

Para x = 0, ∃ máximo

Para x = 2, ∃ mínimo

6.- Concavidad : $y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$; y'' no se anula nunca. No hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
y''	-	+
y	∩	∪



Ejemplo 4

Gráfica $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

1.-Dominio: $x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$; No hay soluciones reales. $Dom(y)=R$

2.- Puntos de corte: Para *x = 0, y = 0*; Para *y = 0, x = 0*. Único punto de corte: *(0, 0)*

3.-Paridad: $f(-x)=f(x)$ y por tanto par (simétrica respecto de OY)

4.-Asíntotas:

Horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1$ luego *y = 1* es una A.H.

Nota: Si hay horizontales lo son por la derecha y por la izquierda

Verticales: No hay porque el denominador no se anula

Oblicuas: No hay. no hay oblicuas.

5.- Crecimiento y decrecimiento: $y'=\dfrac{2x(x^2+1)-2x.x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

Si hacemos $y'=0$ entonces *2x = 0* $\Rightarrow$ *x = 0*

Estudiando la derivada en los intervalos (-∞, 0) y (0, +∞) se obtiene

Para x = 0, ∃Mínimo(0, 0)

	(-∞, 0)	*(0, +∞)*
y'	-	+
y	↘	↗

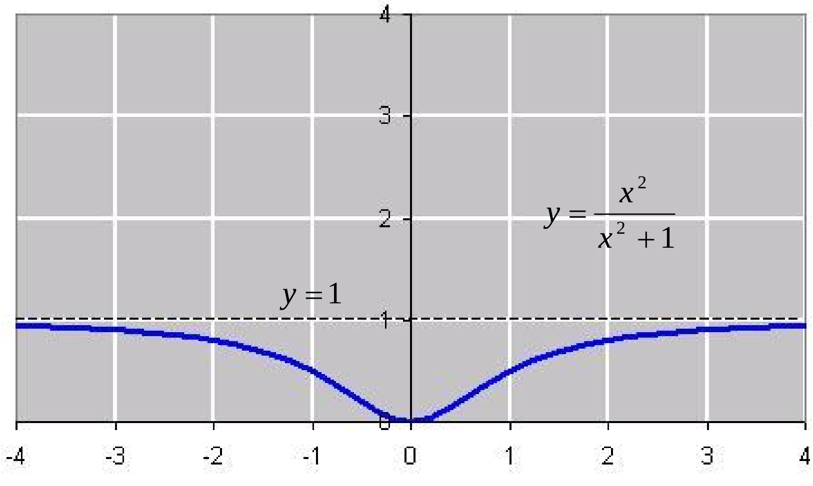
6.- Concavidad :

$$y''=\frac{2(x^2+1)^2-2(x^2+1).2x2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)-8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

Si hacemos $y''=0$, $2-6x^2=0 \Rightarrow x=\pm\, 1/\sqrt{3}$

	$(-\infty,-1/\sqrt{3})$	$(-1/\sqrt{3},\, 1/\sqrt{3})$	$(1/\sqrt{3},+\infty)$
y''	-	+	-
y	∩	∪	∩

Existen puntos de inflexión para $x=-1/\sqrt{3}$ y para $x=1/\sqrt{3}$



Ejemplo 5

Gráfica $y = \dfrac{2x-3}{x+5}$

La gráficas de la forma $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, siendo $c \neq 0$, son siempre hipérbolas y para representarlas podemos omitir el método general de representación de funciones racionales.

Basta con hallar los puntos de corte y las asíntotas.

Puntos de corte:

Para $x = 0$, $y = -3/5$

Para $y = 0$, $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/2$

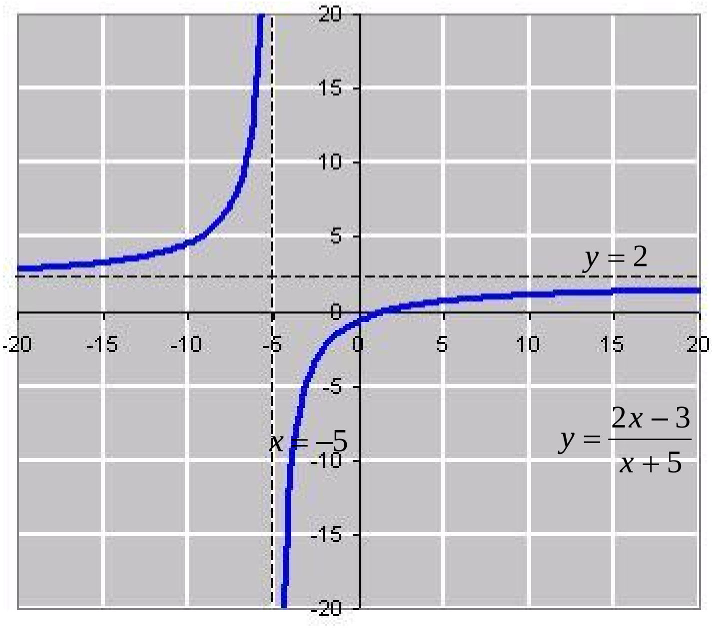
Los puntos de corte son $(0, -3/5)$ y $(3/2, 0)$

Asíntotas:

Asíntota vertical: $x = -5$

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x-3}{x+5} = 2$; $y = 2$ es una asíntota horizontal

Con las dos asíntotas dibujadas aparecen unos nuevos ejes. La curva ocupará primero y tercer cuadrante, o bien segundo y cuarto. Los puntos de corte hallados nos indican los que hemos de elegir. En este caso, segundo y cuarto.



Observando la gráfica vemos que siempre es creciente. No hay máximos ni mínimos.

Es cóncava negativa en $(-\infty, -5)$ y cóncava positiva en $(-5, +\infty)$. No hay puntos de inflexión porque aunque en el punto $x = -5$, cambia la curvatura, dicho punto no es de su dominio.

Ejemplo 6

Gráfica $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

1.- Dominio: $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1; Dom(y)=R-\{-1,1\}$

2.-Puntos de corte: Para x = 0, y = -1 Un punto de corte es *(0,-1)*

Para y = 0, $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=0 \Rightarrow x^2+1=0$ .No hay solución, no hay más puntos de corte.

3.-Paridad: Par. Simétrica respecto de OY

4.- Asíntotas:

Horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1$; *y = 1* es una A.H. Asíntotas oblicuas no hay.

Verticales: $x=-1; x=1$

5.- Crecimiento y decrecimiento: $y'=\dfrac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$.

Si hacemos $y'=0$, $-4x=0 \Rightarrow x=0$

Dividiendo el dominio por el punto cero y estudiando el signo de la derivada en los intervalos *(-∞, -1), (-1, 0), (0, 1)* y *(1, +∞)* se obtienen el siguiente resultado:

	(-∞, -1)	*(-1, 0)*	*(0, 1)*	*(1, +∞)*
y'	+	+	-	-
y	↗	↗	↘	↘

Para x = 0, existemáximo *M(0, -1)*

6.- Concavidad :

$$y''=\frac{-4(x^2-1)^2-2(x^2-1)2x(-4x)}{(x^2-1)^4}=\frac{-4(x^2-1)+16x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{4+12x^2}{(x^2-1)^3}$$

Si hacemos $y''=0$ entonces $4+12x^2=0$ que no tiene solución, luego la segunda derivada no se anula nunca. No hay puntos de inflexión.

La tabla que refleja la concavidad de la curva queda así:

	(-∞, -1)	*(-1, 1)*	*(1, +∞)*
y''	+	-	+
y	∪	∩	∪