# Función exponencial y logarítmica

## 1 Repaso de potencias

Definición: llamamos potencia de base "a" $(a > 0)$ y exponente "n", y lo denotamos por $a^n$ al producto $\begin{cases} \overbrace{a \cdot \ldots\ldots \cdot a}^{n\ veces} \\ a^0 = 1\ (a \neq 0) \quad a^1 = a \end{cases}$.

Para exponentes negativos tenemos $a^{-n} = 1/a^n$.

Para exponentes fraccionarios $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

### 1.1 Propiedades

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $a^r : a^s = a^{r-s}$
- $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
- $(a : b)^r = a^r : b^r$
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $\left(a/b\right)^{-r} = \left(b/a\right)^r$

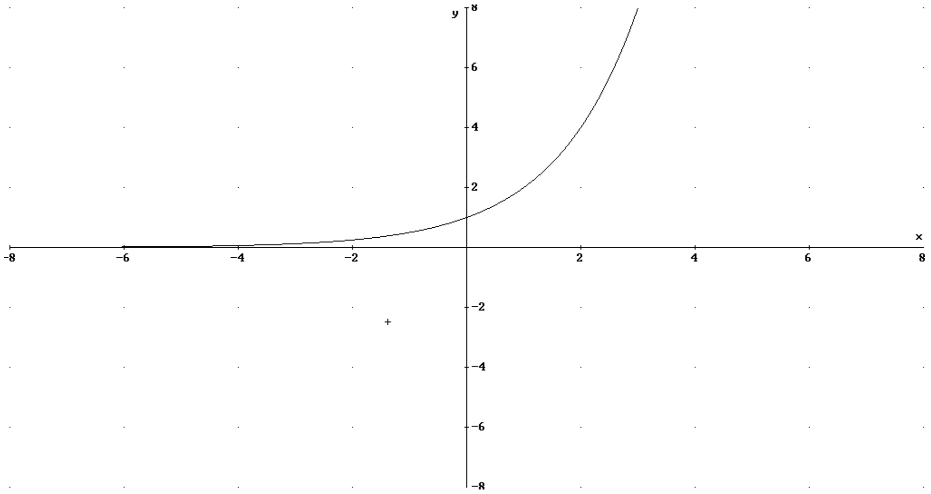
## 2. Función exponencial

Definición: Dado un número real positivo "a", se llama función exponencial de base "a", y la expresaremos por $\exp_a$, a la aplicación: $\begin{cases} \exp_a : \Re \longrightarrow \Re^+ \\ \quad x \longrightarrow \exp_a(x) = a^x \end{cases}$

Ejemplo:

1.- $y = \exp_2(x) = 2^x$

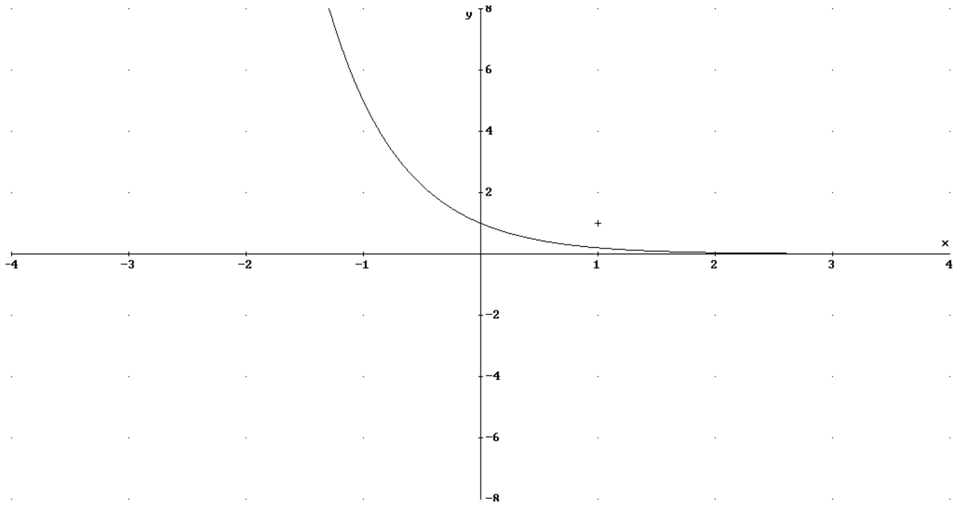
| x | y |
|---|---|
| -4 | 1/16 |
| -3 | 1/8 |
| -2 | 1/4 |
| -1 | 1/2 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |




Ejercicio: hacer $y = \exp_3(x)$

2.- $y = \exp_{1/2}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

| x | y |
|---|---|
| -4 | 16 |
| -3 | 8 |
| -2 | 4 |
| -1 | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | 1/2 |
| 2 | 1/4 |
| 3 | 1/8 |




Ejercicio: Hacer la gráfica de $y = \exp_{1/4}(x)$

Conclusiones que se sacan de las gráficas:

- Si $a > 1$ es estrictamente creciente si $0 < a < 1$ es estrictamente decreciente.
- Domf= $\Re$ Imf= $\Re^+$
- Todas pasan por (0,1).
- Si a=1 es la función constante 1.

## 2.1 Propiedades

Se deduce de las propiedades de las potencias:

1. La imagen de una suma es igual al producto de las imágenes de los sumandos:
   $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$

   Demostración: $\exp_a(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$
2. $\exp_a(x-y) = \exp_a(x) : \exp_a(y)$

   Demostración: $\exp_a(x-y) = a^{x-y} = a^x \cdot a^{-y} = a^x \cdot 1/a^y = \exp_a(x) : \exp_a(y)$
3. $\exp_a(mx) = (\exp_a(x))^m$

   Demostración: $\exp_a(mx) = a^{mx} = (a^x)^m = (\exp_a(x))^m$
4. La función exponencial pasa siempre por el punto (0,1) y por el punto (1,a).
5. a) si la base de la función exponencial es menor que 1 y positiva la función es estrictamente decreciente.

   b) si la base es mayor que 1 la función estrictamente creciente.

## 2.2 Ecuaciones exponenciales

Definición: Se llama ecuación exponencial a la ecuación en la que la incógnita figura como exponente.

Ejemplo: $3^x = 9,\ \sqrt[3]{9^{2x}} = 1,\ 2^{2x-1} - 2^x + 1 = 0$

En general, la resolución de una ecuación exponencial no es fácil y se reduce a los logaritmos, que se estudiarán más adelante.

Por ahora reduciremos el estudio a dos tipos:

- Las ecuaciones monómicas.
- Las ecuaciones polinómicas.

### *2.2.1 Ecuaciones monónicas*

Definición: las ecuaciones exponenciales monónicas son aquellas que se pueden expresar como igualdad de dos expresiones monómicas.

Ejemplos: $3^{2x-1}=9$, $\sqrt[2x-3]{2^{x-3}}=\sqrt{8}$

Para resolverlas es necesario expresar los dos miembros como potencias de la misma base e igualar los exponentes respectivos. $a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$

Ejemplo:

1.- $3^{2x-1}=9 \rightarrow 3^{2x-1}=9 \iff 3^{2x-1}=3^2 \Rightarrow 2x-1=2 \Rightarrow x=3/2$

2.- $\sqrt[2x-3]{2^{x-3}}=\sqrt{8} \rightarrow \sqrt[2x-3]{2^{x-3}}=\sqrt{8} \iff 2^{\frac{x-3}{2x-3}}=2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \dfrac{x-3}{2x-3}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow x=\dfrac{3}{4}$

Nota: Cuándo no se pueden expresar los dos miembros como potencias de la misma base, las ecuaciones no tienen solución o se resuelven por logaritmos, por ejemplo $3^{2x-1}=5$

### *2.2.2 Ecuaciones polinómicas*

Definición: Se llaman ecuaciones exponenciales polinómicas aquellas que mediante un cambio de variable, se pueden reducir a ecuaciones polinómicas.

Para resolver una ecuación exponencial polinómica hay que seguir los siguientes pasos:

- Cambio de variable
- Resolución de la ecuación polinómica obtenida por el cambio.
- Deshacer el cambio, donde nos aparecerán ecuaciones mónicas que sabemos solucionar.

Ejemplo:

1.) $2^{2x}-3\cdot 2^x+2=0$

Realizamos el cambio de variable $2^x=t$

Obtenemos: $t^2-3t+2=0$

La resolvemos obteniendo t=1 y t=2

Deshacemos el cambio $\otimes\ si\ \ t=1 \iff 2^x=1 \iff 2^x=2^0 \Rightarrow x=0$

$\otimes\ si\ \ t=2 \iff 2^x=2 \iff x=1$

2.) $2^{2x+1}-3\cdot 2^x+1=0$

$2\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x+1=0$ hacemos $2^x=t$

$$2t^2-3t+2=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow 2^x=1 \Rightarrow 2^x=2^0 \Rightarrow x=0 \\ t=1/2 \Rightarrow 2^x=1/2 \Rightarrow 2^x=2^{-1} \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

3.) $2-3^{-x}+3^{x+1}=0$

$2-\dfrac{1}{3^x}+3\cdot 3^x=0$

$2\cdot 3^x-1+3\cdot 3^{2x}=0$ hacemos $3^x=t$

$$2t-1+3t^2=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \Rightarrow 3^x=-1 \Rightarrow \textit{imposible} \\ t=1/3 \Rightarrow 3^x=3^{-1} \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

### 2.2.3 Sistemas de ecuaciones exponenciales

Definición: Se llaman sistemas de ecuaciones exponenciales, los sistemas de ecuaciones en los que las incógnitas se encuentran como exponentes.

La resolución de estos sistemas se hace como los ordinarios, pero teniendo en cuenta que las ecuaciones son exponenciales y tendremos que aplicar los métodos anteriores.

Ejemplo:

1.- $\begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}-5^{y+1}=-9 \end{cases}$

Hacemos los cambios de variable $2^x=u \quad 5^y=v$

$\begin{cases} u+v=9 \\ 4u-5v=-9 \end{cases}$ Resolviéndolo obtenemos: $\begin{cases} 5u+5v=45 \\ 4u-5v=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u=4 \\ v=5 \end{matrix}$

Deshacemos el cambio: $\begin{matrix} u=4 \Leftrightarrow 2^x=4 \Leftrightarrow x=2 \\ v=5 \Leftrightarrow 5^y=5 \Leftrightarrow y=1 \end{matrix}$

La solución es el par ordenado: (x,y)=(2,1)

Ejercicios:

1.- $\begin{cases} 5^{x+y}=25^3 \\ 5^{x-y}=25 \end{cases}$

2.- $\begin{cases} 3^x+3^y=36 \\ 3^{x+y}=243 \end{cases}$

3.- $\begin{cases} 2^x+3^y=7 \\ 2^{x+1}-3^{y+1}=-1 \end{cases}$

4.- $\begin{cases} 2^{2x}+2^{2y}=85 \\ 2^{2(x+y)}=324 \end{cases}$

## 3. Función logarítmica

En matemáticas todas las operaciones y funciones tienen sus "inversas" por ejemplo: $x \leftrightarrow -; x \leftrightarrow \div; senx \leftrightarrow arcsenx;$....para la función exponencial también hay una función inversa que vamos a denominar función logarítmica.

> *Nota: Se llama función inversa de f(x) a otra función, a la que se designa por $f^{-1}(x)$, y que cumple la siguiente condición* $si\ \ f(a)=b \ \Rightarrow\ f^{-1}(b)=a$.
> *Para obtenerla analíticamente se procede de la siguiente forma:*
> - *Intercambiamos la "x" por la "y" en la expresión inicial* $y=f(x) \Rightarrow x=f(y)$
> - *Se despeja la "y" de la expresión obtenida* $x=f(x) \ \Rightarrow\ y=f^{-1}(x)$
>
> *Ejemplo:* $y=2x-3 \ \Rightarrow\ x=2y-3 \ \Rightarrow\ y=\dfrac{x+3}{2}$ *luego la función inversa es* $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{2}$
>
> *Ejemplo:* $y=x^3-3 \ \Rightarrow\ x=y^3-3 \ \Rightarrow\ y=\sqrt[3]{x+3} \ \Leftrightarrow\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+3}$

La función inversa de la exponencial nos va a servir para despejar expresiones del tipo $2^x=3$, que hasta ahora no podíamos.

Definición de logaritmo: El logaritmo de un número "y" estrictamente positivo en una base "a" también estrictamente positiva, es el número "x" al que debe elevarse "a" para obtener "y".

Se denota por $\log_a y = x$ y se lee logaritmo en base a de y igual a x.

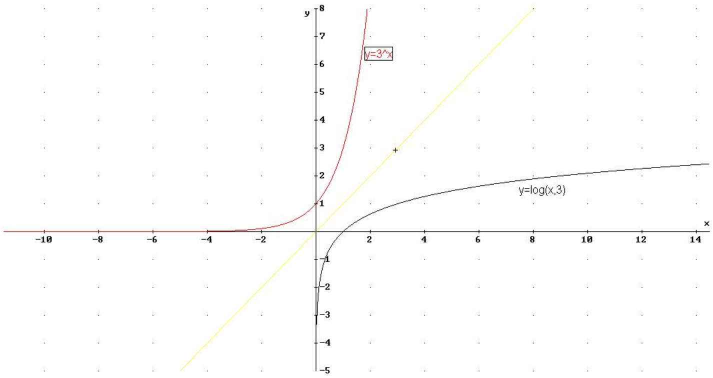
$$\log_a y = x \ \Leftrightarrow\ a^x = y$$

Definición: Dado un número real a $(a \phi 0)$, se llama función logarítmica de en base a, y la expresaremos como $\log_a$ a la aplicación: $\begin{cases} \log_a : \Re^{+} \longrightarrow \Re \\ \qquad x \longrightarrow y=\log_a x \end{cases}$

Ejemplo:

$y = \log_3 x \quad \left( \Leftrightarrow \quad 3^y = x \right)$

| x | y |
|---|---|
| 1/3 | -1 |
| 1/9 | -2 |
| 1/27 | -3 |
| 1 | 0 |
| 3 | 1 |
| 9 | 2 |
| 27 | 3 |



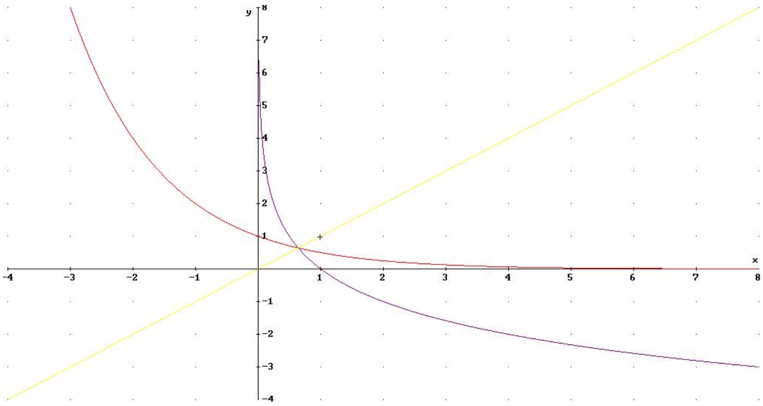

$y = 3^x$

| x | y |
|---|---|
| -3 | 1/27 |
| -2 | 1/9 |
| -1 | 1/3 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 9 |
| 3 | 27 |

Ejemplo:

$y = \log_{1/2} x \quad \left( \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^y \right)$

| x | y |
|---|---|
| 1/8 | 3 |
| 1/4 | 2 |
| 1/2 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | -1 |
| 4 | -2 |
| 8 | -3 |



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

| x | y |
|---|---|
| -3 | 1/27 |
| -2 | 1/9 |
| -1 | 1/3 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 9 |
| 3 | 27 |

Ejercicios: Realizar las gráficas de las funciones: $y = \log_2 x$ y $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Conclusiones que se obtienen de las gráficas:

- Si $a > 1 \Rightarrow$ es creciente Si $0 < a < 1 \Rightarrow$ es decreciente
- Domf= $\Re^+$ Imf= $\Re$
- $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son simétricas respecto de la bisectriz del I y III cuadrante.
- Todas pasan por el punto (1,0)

Ejemplos de logaritmos:

1.- $\log_2 16 = ?$

$$\log_2 16 = x \Leftrightarrow 2^x = 16 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow \log_2 16 = 4$$

2.- $\log_3 81 = ?$

$$\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow \log_3 81 = 4$$

3.- $\log_8 4 = ?$

$$\log_8 4 = x \iff 8^x = 4 \iff 2^{3x} = 2^2 \iff 3x = 2 \iff x = 2/3 \Rightarrow \log_8 4 = 2/3$$

Ejercicios:

1.- Escribir las siguientes igualdades exponenciales en forma logarítmica:

a) $2^7 = 128$ b) $2^5 = 32$ c) $5^3 = 125$

2.- Escribir las siguientes igualdades logarítmicas en forma exponencial:

a) $\log_8 64 = 2$ b) $\log_2 64 = 6$

## 3.1 Propiedades:

- $A = B \iff \log_a A = \log_a B$
- $\log_a 1 = 0$ Ej: $\log_2 1 = \log_5 1 = 0$
- $\log_a a = 1$ Ej: $\log_3 3 = \log_5 5 = \log_{19} 19 = 1$
- $\log_a a^x = x$ Ej: $\log_2 32 = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$
  $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ Ej: $\log_2 15 = \log_2 3 + \log_2 5$
- $\log_a(x_1 / x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$ Ej: $\log \dfrac{15}{2} = \log 15 - \log 2$
- $\log_a x^n = n \log_a x$ Ej: $\log 3^5 = 5 \log 3$
- Fórmula de cambio de base: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ Ej: $\log_5 8 = \dfrac{\log 8}{\log 5} = 1{,}292$

Ejemplos:

1.- Calcular: $\log_3 81 \rightarrow \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4$

$\log_5 1/25 \rightarrow \log_5 1/25 = \log_5 1 - \log_5 25 = 0 - 2\log_5 5 = -2$

2.- Expresar en un logaritmo simple las siguientes expresiones:

a) $\log 3 + \log 5 \rightarrow \log 3 + \log 5 = \log 15$

b) $\log 27 - \log 9 \rightarrow \log 27 - \log 9 = \log 27/9 = \log 3$

c) $3\log 2 + \log 4 - \log 8 \rightarrow 3\log 2 + \log 4 - \log 8 = \log 2^3 + \log 4 - \log 8 = \log 4$

d) $2\log x - 3\log y + 2\log xy \rightarrow 2\log x - 3\log y + 2\log xy = \log x^2 - \log y^3 + \log x^2 y^2 =$

$$= \log \frac{x^2 \cdot x^2 y^2}{y^3} = \log \frac{x^4}{y}$$

3.- Expresar en función de $\log a,\ \log b,\ \log c$

a) $\log\dfrac{1}{a^2} \ \to\ \log\dfrac{1}{a^2} = \log 1 - \log a^2 = 0 - 2\log a = -2\log a$

b) $\log\dfrac{ab}{c} \ \to\ \log\dfrac{ab}{c} = \log ab - \log c = \log a + \log b - \log c$

Ejercicios:

1.- Escribir las siguientes potencias en forma logarítmica:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^5 = 32$ | $3^4 = 81$ | $4^{-2} = 1/16$ | $9^3 = 729$ | $6^2 = 36$ | $12^0 = 1$ |
| $2^{-9} = 1/512$ | $1000^{1/3} = 10$ | $7^{-3} = 1/343$ | $10^6 = 1000000$ | $16^{1/2} = 4$ | $(1/2)^3 = 1/8$ |

2.- Calcular:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log_3 27$ | $\log_2 32$ | $\log 100$ | $\log_5 125$ | $\log_4 4$ | $\log_7 49$ |
| $\log_3(1/9)$ | $\log_4(1/256)$ | $\log(0{,}0001)$ | $\log_6 1$ | $\log_2 1024$ | $\log_3(1/243)$ |

3.- Escribir en función de $\log a\ \ y\ \ \log b$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log ab$ | $\log a/b$ | $\log(a^2 b)$ | $\log\sqrt{a}$ | $\log(1/a^2)$ | $\log(a\sqrt{b})$ |
| $\log(a^3/b)$ | $\log(a^2/b^3)$ | $\log\sqrt{a/b}$ l | $\log(1/ab^4)$ | $\log(1/\sqrt{ab})$ | $\log\sqrt[6]{a^2 b}$ |

4.- Expresar como un solo logaritmo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\log 3 + \log 4$ | $\log 2 + \log 7$ | $\log 15 - \log 5$ | $\log 24 - \log 4$ |
| $\log 2 + \log 3 + \log 5$ | $\log 6 + \log 3 - \log 9$ | $2\log 3 + \log 4 - \log 12$ | $3\log 2 + 2\log 5 - \log 20$ |
| $1/2\log 80 - 1/2\log 5$ | $\log 15 - (1/2)\log 9$ | $2\log a - \log b - \log c$ | $\log a - 1/2\log' b - 3\log c$ |

5.- Resolver, teniendo en cuenta que “x” e “y” son estrictamente positivos: $\begin{cases} \log xy = 7 \\ \log\dfrac{x}{y} = 1 \end{cases}$

6.- Sabiendo que $\log(p-q+1)=0$ y $\log(pq)+1=0$ demostrar que $p=q=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

## 3.2 Ecuaciones logarítmicas

Definición: Una ecuación logarítmica es una ecuación en la cuál la variable está afectada por un logaritmo.

La técnica para sus resoluciones es aplicar las propiedades de los logaritmos para llegar a una expresión: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ y por tanto $f(x) = g(x)$.

Cuándo encontremos la solución, hay que comprobar si es válida teniendo en cuenta que no existen logaritmos de números negativos.

Ejemplos:

1.- $\log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 2 \Leftrightarrow x = 2 \quad (\textit{válida})$

2.- $\log x + \log 50 = \log 1000 \Leftrightarrow \log 50x = \log 1000 \Leftrightarrow 50x = 1000 \Leftrightarrow x = \frac{1000}{50} = 20 \qquad (\textit{válida})$

3.- $2\log x - \log(x-16) = 2 \Leftrightarrow \log x^2 - \log(x-16) = \log 100 \Leftrightarrow \log \frac{x^2}{x-16} = \log 100 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-16} = 100 \Leftrightarrow x^2 = (x-16)100 \Leftrightarrow x^2 - 100x + 1600 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 20 \wedge x = 80 \qquad (\textit{válidas})$$

4.- $2\log x - \log 16 = \log \frac{x}{2}$

$$\log x^2 - \log 16 = \log \frac{x}{2}$$

$$\log \frac{x^2}{16} = \log \frac{x}{2}$$

$$\frac{x^2}{16} = \frac{x}{2}$$

$$2x^2 = 16x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (\textit{no válida, no existe } \log 0) \\ x = 8 & (\textit{válida}) \end{cases}$$

5.- $\log(2x+2) + \log(x+3) = \log 6$

$$\log(2x+2)(x+3) = \log 6$$

$$2x^2 + 8x + 6 = 6$$

$$2x^2 + 8x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (\textit{válida}) \\ x = -4 & (\textit{no válida, no existe } \log(2(-4)+2) = \log -6) \end{cases}$$

## 3.3 <u>Uso de los logaritmos para resolver ecuaciones</u>

En ocasiones nos encontramos con ecuaciones exponenciales que no hemos podido resolver, por ejemplo $2^x = 3$

Aplicando logaritmos $\log 2^x = \log 3 \Rightarrow x\log 2 = \log 3 \Rightarrow x = \log 3 / \log 2 = 1{,}585$

Ejemplo:

1.- $3^x = 10 \Rightarrow \log 3^x = \log 10$

$$x\log 3 = \log 10$$

$$x = \frac{\log 10}{\log 3} = 2{,}1$$

2.- $5^{2x}=8 \Rightarrow \log 5^{2x}=\log 8$

$$2x\log 5=\log 8$$

$$x=\frac{\log 8}{2\log 5}=0{,}646$$

3.- $2^{-3x}=5 \Rightarrow \log 2^{-3x}=\log 5$

$$-3x\log 2=\log 5$$

$$x=-\frac{\log 5}{3\log 2}$$

4.- $5\cdot 2^{x}=3\cdot 7^{x} \Rightarrow \log 5\cdot 2^{x}=\log 3\cdot 7^{x}$

$$\log 5+\log 2^{x}=\log 3+\log 7^{x}$$

$$\log 5+x\log 2=\log 3+x\log 7$$

$$x(\log 2-\log 7)=\log 3-\log 5$$

$$x=\frac{\log 3-\log 5}{\log 2-\log 7}=0{,}408$$

5.- $5^{4x-1}=7^{x+2} \Rightarrow \log 5^{4x-1}=\log 7^{x+2}$

$$(4x-1)\log 5=(x+2)\log 7$$

$$4x\log 5-\log 5=x\log 7+2\log 7$$

$$x(4\log 5-\log 7)=\log 5+2\log 7$$

$$x=\frac{\log 5+2\log 7}{4\log 5-\log 7}=1{,}22$$

6.- $2^{2x}-2^{x}=6 \Rightarrow 2^{2x}-2^{x}-6=0$

$cambio\ \ 2^{x}=t$

$t^{2}-t-6=0 \Rightarrow t=-2 \ \wedge\ t=3$

$Deshacemos\ \ el\ \ cambio$

$\otimes\ si\ t=-2 \Rightarrow 2^{x}=-2\ \ no\ \ existe\ \ solución$

$\otimes\ si\ t=3 \Rightarrow 2^{x}=3 \Rightarrow x=\log 3/\log 2=1{,}58$

## Ejemplos de aplicación. Interés compuesto. Crecimiento y decrecimiento.

1.- La población de una granja avícola pasa de 1000 a 1300 individuos en un mes. Suponiendo que sigue una ley exponencial, calcular:

a) La ley que expresa la población en función del tiempo.

b) ¿Cuál será la población al cabo de un año?

c) ¿Cuándo habrá 66541 individuos?.

a) La ley que expresa la población en función del tiempo es de la forma $f(x)=ka^x$

para x=0 $f(0)=1000$ $1000=ka^0$

para x=1 $f(1)=1300$ $1300=ka^1$

Resolviendo el sistema obtenemos: k=1000 y a=1,3

Por tanto la función es $y=1000.(1,3)^x$

b) La población dentro de un año será: $f(12)=1000.(1,3)^{12}=23298$ individuos.

c) Si debe haber 66541 individuos, se tiene que cumplir: $66541=1000.(1,3)^x$

Resolviendo: x=log66,541/log1,3=16 meses

2.- Un lago está poblado con una nueva especie de peces. Actualmente se estima una población de 136000 ejemplares y tres años antes, 17000 peces. Suponiendo un crecimiento exponencial, calcular:

a) La función que expresa el número de peces en función del tiempo.

b) ¿Cuándo habrá un millón de ejemplares?

c) ¿Cuántos años hace que se introdujeron los primeros 132 ejemplares?

a) Tomamos como origen de tiempos t=0, el momento actual. La ley que expresa la población en función del tiempo es de la forma $f(x)=ka^t$.

para t=-3 $f(-3)=17000$ $17000=ka^{-3}$

para t=0 $f(0)=136000$ $136000=ka^0$

Resolviendo el sistema obtenemos: k=136000 a=2 por tanto $f(x)=136000.2^t$

b) para 1000000 de peces: $1000000=136000.2^t$ despejando t=log(1000000/136000)/log2=2,88 años.

c) Si debe haber 132 peces: $132=136000.2^t$ despejando t=-10 años, es decir hace 10 años.

3.- Una bola de nieve pesa inicialmente 300g. Rueda por una montaña nevada incrementando su peso en un 40% cada 100 m.

a) ¿Cuánto pesará la bola después de descender 400 m? ¿y si ha descendido 1 km?

b) Encontrar la función que permita expresar el peso de la bola de nieve en función de la distancia recorrida por la misma.

c) Si en un momento determinado la bola pesa 23,811 kg ¿Cuántos metros ha descendido hasta ese momento?.

a) a los 100m del inicio del recorrido la bola pesa: $300+\frac{40}{100}\cdot 300=300\left(1+\frac{40}{100}\right)=300\cdot 1,4$ pesa alos 100 m.

a los 200 m la bola pesa: $300\cdot 1,4+\frac{40}{100}\cdot 300\cdot 1,4=300\cdot 1,4\left(1+\frac{40}{100}\right)=300\cdot 1,4^2$

a los 400 m la bola pesa $300\cdot 1,4^4=1152,48\ gr$

a los 1000 m la bola pesa $300\cdot 1,4^{10}=8677,64\,gr$

b) la función que expresa el peso (P) de la bola en función de la distancia (x) de metros recorridos viene dada por:

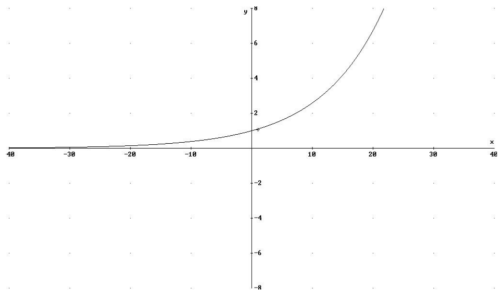
$P=300\cdot 1,4^{\frac{x}{100}}$

c) si la bola pesa 23,811 kg=23811 gr ha recorrido x metros, es decir:

$23811=300\cdot 1,4^{\frac{x}{100}} \Rightarrow despejando\ x=\frac{100\cdot \log 79,37}{\log 1,4}=1300\ m$

4.- Inflación. La inflación es la pérdida del valor adquisitivo del dinero, es decir, si un bolígrafo costó el año pasado 1 €, este año cuesta 1,1 €, es decir la inflación ha sido de un 10% anual. Si la inflación se mantiene constante en un 10% anual, la expresión de la función que da el coste de este bolígrafo al cabo de x años es: $y=1\cdot 1,1^x$

a) dibujar la gráfica que muestra el coste del bolígrafo en el pasado y en futuro.
b) ¿Cuánto costará este bolígrafo dentro de 15 años? ¿y hace 5 años?
c) ¿Cuántos años han de pasar para que el bolígrafo valga 2 €?



a)

b) dentro de 15 años costará $1,1^{15}=4,1772$ €

hace 5 años costaba $1,1^{-5}=0,621$ €

c) para que el bolígrafo valga 2 € han de pasar x años:

$1,1^x=2$ despejando x≈7,3 años

5.-Un empresario incrementa el precio de sus productos en un 5% anual. Actualmente, uno de sus productos vale 18 €. Encontrar la función que dé el precio del producto en función de los años transcurridos. A partir de esta, contestar a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuánto costará el producto dentro de 4 años?
b) ¿Cuánto costaba hace 4 años?
c) ¿Cuántos años han de pasar para que el precio actual se duplique?

a) la función es: $P=18\left(1+\frac{5}{100}\right)^x \Rightarrow P=18\cdot 1,05^x$

Dentro de 4 años $P=18.1,05^4=21,879$ €

b) Hace 4 años $P=18-1,05^{-4}=14,81$ €

c) para que valga 54 € han de pasar x años: $54=18.1,05^x$ despejando x=22,52 años