

## Expresiones Algebraicas - Polinomios II

1. Dados los polinomios:  $P(x) = -3x^2 - \frac{5}{3}x + 8$   $Q(x) = \frac{-3}{5}x^3 + 4x^2 - \frac{2}{3}x$   
 $R(x) = \frac{-2}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$   $S(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x + 3$   $M(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$

Calcular: a)  $P(x) + Q(x)$  b)  $Q(x) + S(x)$  c)  $R(x) - M(x)$  d)  $P(x) - (R(x) - S(x))$ ,  
 e)  $S(x) + (-R(x) + P(x))$  f)  $M(x) - S(x) + Q(x)$

Sol: a)  $-3/5x^3 + x^2 - 7/3x + 8$ , b)  $-3/5x^3 + 3x^2 - 1/6x + 3$ ; c)  $-2/3x^3 + 11/5x^2 - 13/5x + 3/5$ , d)  $2/3x^3 - 6x^2 - 17/30x + 52/5$ , e)  $2/3x^3 - 6x^2 - 17/30x + 52/3$ , f)  $-3/5x^3 + 24/5x^2 + 5/6x - 3$ .

2. Determinar los polinomios P(x), Q(x) y R(x) en las siguientes igualdades:

a)  $3x^7 - 5x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 8 - P(x) = 4x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 6x^2 + x - 11$

b)  $6x^4 - 3x^3 + 2x^2 + Q(x) = 7x^5 - 9x^3 + 5x^2 - 7x - 2$

c)  $3x^3 - \sqrt{8}x^2 + \frac{1}{5}x - \sqrt{3} = R(x) - \sqrt{2}x^2 + \frac{2}{5}x + \sqrt{3}$

a)  $P(x) = 3x^7 - 4x^5 + 3x^3 - x^2 - x + 19$ , b)  $Q(x) = 7x^5 - 6x^3 + 3x^2 - 7x - 2$ , c)  $R(x) = 3x^3 - \sqrt{2}x^2 - 1/5x - 2\sqrt{3}$ .

3. Efectuar los siguientes productos:

a)  $(3x^2 + 5x - 5) \cdot (x + 2)$

b)  $\left(\frac{2}{3}x^3 - 4x + 8\right) \cdot (2x^2 - 3x + 5)$

c)  $(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 1) \cdot (-3x^2)$

d)  $4x^3(x^4 - 8x^3 + 7x^2 - x + 5)$

e)  $(2x^4 - 4x^3 + 2x + 3) \cdot (3x^3 - 2x + 1)$

f)  $(3x^2 - 5) \cdot (4x + 3) \cdot (2x^2 + 4x + 6)$

Sol: a)  $3x^3 + 11x^2 + 5x - 10$ , b)  $4/3x^5 - 2x^4 - 14/3x^3 + 28x^2 - 44x + 40$ , c)  $-3x^7 + 9x^5 - 6x^4 - 3x^2$ , d)  $4x^7 - 32x^6 + 28x^5 - 4x^4 + 20x^3$ , e)  $6x^7 - 12x^6 - 4x^5 + 16x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 4x + 3$ , f)  $24x^5 + 66x^4 + 68x^3 - 56x^2 - 180x - 90$ .

4. Determinar un polinomio de primer grado P(x) tal que  $(x^2 - 1) \cdot P(x) - 2x^3 = 3x^2 - 2x - 3$  Sol:  $P(x) = 2x + 3$

5. Completar las siguientes igualdades

a)  $x^2 + 6x + 9 = (\dots)^2$

b)  $4x^2 - 4x + 1 = (\dots)^2$

c)  $x^4 - 1 = (\dots) \cdot (\dots) \cdot (\dots)$

d)  $9a^2b^2 - \frac{4}{25}x^4 = (\dots) \cdot (\dots)$

e)  $36x^4 + 60x^3 + 25x^2 = (\dots)^2$

f)  $x^2 - 12x + \dots = (\dots)^2$

g)  $x^4 - \frac{x^2}{9} = (\dots) \cdot (\dots) \cdot (\dots)$

h)  $a^2b^4 - 2ab^2y + y^2 = (\dots)^2$

i)  $\frac{1}{4} - \frac{1}{3}y + \frac{1}{9}y^2 = (\dots)^2$

j)  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 = (\dots)^2$

i)  $x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{36} = (\dots)^2$

Sol: a)  $(x+3)^2$ , b)  $(2x-1)^2$ , c)  $(x^2+1)(x^2-1)$ , d)  $(3ab + 2/5x^2) \cdot (3ab - 2/5x^2)$ , e)  $(6x^2+5x)^2$ , f)  $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$ , g)  $x \cdot (x-1/3) \cdot (x^2 + x/3)$ , h)  $(ab^2 - y)^2$ , i)  $(1/2 - 1/3y)^2$ , j)  $(x/y + y/x)^2$ , k)  $(x^2 + 1/6)^2$

6. Como  $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ , decir cuál de las dos expresiones es cierta:

a)  $(x+1) \mid (x^2 + 2x + 1)$

b)  $(x^2 + 2x + 1) \mid (x+1)$

¿Cuál es el polinomio divisor? ¿Es  $x^2 + 2x + 1$  múltiplo de  $x+1$ ?  $x+1$  es divisor y  $x^2+2x+1$  es un múltiplo.

7. Sabiendo que  $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ , decir cuál de las dos expresiones es cierta:

a)  $(x-2) \mid (x^2 - 4x + 4)$

b)  $(x^2 - 4x + 4) \mid (x-2)$

¿Cuál es el polinomio divisor? ¿Es  $x^2 - 4x + 4$  múltiplo de  $x-2$ ? ¿Es  $x-2$  divisible por  $x^2 - 4x + 4$ ?

Sol: cierto a); x-2; sí; no.

8. Encontrar 3 polinomios divisibles por a)  $3x^2 + 4x - 1$ , b)  $(x-1)^2$

Sol: a)  $9x^2 + 12x - 3$ ;  $3x^4 + 4x^3 - x^2$ ;  $3x^3 + 7x^2 + 3x - 1$ , b)  $7(x-1)^2$ ;  $(x-1)^4$ ;  $(x-1)^9$

9. Encontrar 3 polinomios divisores y dos múltiplos de  $p(x) = x^2(x^2 - 4)$  Sol:  $x^2$ ;  $x+2$ ;  $x-2$ ;  $x^3(x^2-4)$ ;  $x^2(x^2-4)^2$

10. Sean P(x), Q(x), C(x) y R(x) polinomios tales que  $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$

- Calcular a)  $Q(x)$  siendo  $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x - 4$ ;  $C(x) = 2x + 1$ ;  $R(x) = 6x - 1$  Sol:  $Q(x) = x^2 - 3x - 3$   
 b)  $Q(x)$  y  $R(x)$  siendo  $P(x) = 4x^2 - 7x + 6$ ;  $C(x) = 2x - 1$ ; Sol:  $Q(x) = 2x - 5/2$ ;  $R(x) = 7/2$   
 c)  $P(x)$  siendo  $Q(x) = 4x^3 - 8$ ;  $C(x) = 3x + 8$ ;  $R(x) = 2x - 12$ ; Sol:  $P(x) = 12x^4 + 36x^3 - 22x - 84$ .

11. Efectuar las siguientes divisiones indicando cuál es el polinomio cociente y el resto

- a)  $(8x^5 - 14x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 8x + 3) : (2x^2 - 5x + 3)$       b)  $(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) : (x^2 - x + 2)$   
 c)  $(x^6 - 3x + x^3 - 3) : (x^2 - 3x)$       d)  $(6x^4 - x^3 + 5x^2 + 3x - 14) : (2x^2 - 3x + 7)$   
 e)  $(4x^2 - 19x + 4x^3) \cdot (2x - 3)$       f)  $(x^4 + x^2 + 3x - 4) : (x^2 - 2x + 3)$       g)  $(2x^4 - 5) : (2x + 2)$   
 h)  $\left(9x^4 + \frac{9}{2}x^2 + 5x + 4x^6 + \frac{10}{3}x^3\right) : (2x^2 + 3)$       i)  $(4x^2 - 6x + 5) : (2x^2 - 6)$   
 j)  $(3x^5 + 6x^3 - 7x^2 + 2x - 7) : (x - 3)$       k)  $\left(x^4 - 7x^2 + 9x - \frac{1}{2}\right) : \left(x + \frac{1}{3}\right)$

Sol: a)  $C(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 1$ ;  $R(x) = 0$ ; b)  $C(x) = x^2 - 4x + 5$ ,  $R(x) = x - 4$ ; c)  $C(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 28x + 84$ ;  $R(x) = 249x - 3$ ; d)  $C(x) = 3x^2 + 4x - 2$ ;  $R(x) = -31x$ ; e)  $C(x) = 2x^2 + 5x - 2$ ;  $R(x) = -6$ ; f)  $C(x) = x^2 + 2x + 2$ ;  $R(x) = x - 10$ ; g)  $C(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ ;  $R(x) = -1$ ; h)  $C(x) = 2x^4 + 3/2x^2 + 5/3x$ ;  $R(x) = 0$ ; i)  $C(x) = 2$ ;  $R(x) = -6x + 17$ ; j)  $C(x) = 3x^4 + 9x^3 + 33x^2 + 92x + 278$ ;  $R(x) = 827$ ; k)  $C(x) = x^3 - 1/3x^2 - 62/9x + 305/27$ ;  $R(x) = -691/162$ .

12. Mediante la regla de Ruffini, hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

- a)  $(x^3 - x^2 - 11x - 10) : (x - 2)$       b)  $(8x^3 - 3x + x^4 + 20 + 12x^2) : (x + 3)$   
 c)  $(6x^4 + 20x^3 - 41x^2 + 50x + 20) : (x + 5)$       d)  $(20 - 22x^3 + 5x^5) : (x - 2)$   
 e)  $\left(\frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{3}x^5 - 3x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x + 4\right) : (x - 2)$       f)  $\left(x + \frac{3}{2}x^4 + 2x^5 - \frac{13}{4}x^3\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$   
 g)  $(x^6 + 5x^4 - 3x^2 + 1) : (2x - 4)$       h)  $(x^3 + 2x^2 - 5x + 1) : (2x + 3)$

Sol: a)  $C(x) = x^2 + x + 13$ ;  $R(x) = 16$ ; b)  $C(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 6$ ;  $R(x) = 2$ ; c)  $C(x) = 6x^3 - 10x^2 + 9x + 5$ ;  $R(x) = -5$ ; d)  $C(x) = 5x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 4x - 8$ ;  $R(x) = R = 4$ ; e)  $C(x) = 1/2x^5 + 5/3x^4 + 1/3x^3 - 1/6x^2 - 1/3x$ ;  $R = 4$ ; f)  $C(x) = 2x^4 + 5/2x^3 - 2x^2 - x + 1/2$ ;  $R = 1/4$ ; g)  $C(x) = 1/2x^5 + x^4 + 9/2x^3 + 9x^2 + 33/2x + 33$ ;  $R = 133$ ; h)  $C(x) = 1/2x^2 + 1/4x - 23/8$ ;  $R = 77/8$

13. Hallar el valor numérico del polinomio  $2x^3 - 3x^2 - x + 5$  para  $x = -2$ ;  $4$ ;  $\frac{1}{2}$  Sol: 21; 81; 4.

14. Calcular b para que el valor numérico de  $x^4 - bx^2 + 5x$  para  $x = \frac{-2}{3}$  sea igual a 1 Sol:  $b = -335/36$ .

15. De entre los números 0, 1, 2, 3 y 4, ¿cuáles son raíces del polinomio  $x^3 - 5x^2 + 4$ ? Sol: sólo  $x = 1$

16. Comprobar si  $1 + \sqrt{3}$  es raíz de  $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2$  Sol: Sí

17. De los números 1, 0,  $\sqrt{2}$ ,  $-1$ ,  $2$  y  $-3$  decir cuáles son raíces y cuáles no, de cada uno de los polinomios siguientes:

- a)  $P(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$       b)  $Q(x) = 2x^2 + 10x - 28$   
 c)  $R(x) = x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2}$       d)  $S(x) = x^3 + (1 + \sqrt{2})x^2 + \sqrt{2}x$       e)  $I(x) = x$  Sol: a)

sí: 0, -1, -3; b) sí: 2; c) sí:  $\sqrt{2}$ , -1, d) sí: 0, -1, e) sí: 0

18. Hallar el resto de la división de  $x^5 - 1$  entre los siguientes polinomios:

- a)  $x - 1$       b)  $x + 1$       c)  $x - 3$       d)  $x + 7$       e)  $x - 5$  Sol: a) 0, b) -2, c) 242, d) -16808, e) 3124

19. Calcular el valor de c sabiendo que el resto de la división de  $x^4 - 3x + c$  entre  $x + 1/2$  es  $-3/8$  Sol:  $c = -31/16$

20. Calcular a para que el resto de la división de  $ax^3 - a$  entre  $x - 2$  sea  $7/4$  Sol:  $a = 1/4$

21. Determinar m de modo que el resto de la división de  $2x^3 - x + m$  por  $x + 2$  sea 5 Sol:  $m = 19$

22. Calcular a para que 3 sea raíz del polinomio  $x^3 - 6x^2 + ax - 2$  Sol:  $a = 29/3$

23. Hallar p para que sea exacta la división  $(x^2 - 2x + p) : (x + 3)$  Sol:  $p = -15$

24. Hallar r para que sea nulo el resto de la división  $\left(x^3 - \frac{2}{3}x^2 + rx + \frac{7}{9}\right) : \left(x + \frac{1}{3}\right)$  Sol:  $r = 2$

25. Añadir el término independiente a  $x^4 - 3x^3 + x$  para que sea divisible por  $x - 2$  Sol:  $a_0 = 6$

26. Hallar b para que  $x - 3$  sea un factor de  $x^3 - 6x^2 + 2x - 2b + 2$  Sol:  $b = -19/2$ .

27. Hallar m para que  $x - \frac{1}{2}$  sea un factor de  $2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{6}x + 3m$  Sol:  $m = -1/9$