

## Descomposición factorial de polinomios. Ecuaciones de grado superior

- $x=a$  es un cero o raíz de un polinomio  $P(x)$  si su valor numérico en  $x=a$  vale cero ( $P(a)=0$ ). "Todo polinomio de grado  $n$  tiene a lo sumo  $n$  raíces reales". Las raíces de enteras son divisores del término independiente. Para su cálculo se utiliza la regla de Ruffini
- Teorema del Resto.** El resto de la división de un polinomio  $P(x)$  por  $x-a$  es igual al valor numérico de dicho polinomio por  $x-a$  ( $R=P(a)$ ).  
Si la división de  $P(x)$  por  $x-a$  es exacta entonces  $x-a$  es un factor de la descomposición factorial de  $P(x)$ .  
"Descomponer un polinomio factorialmente consiste en hallar dos o más polinomios, no constantes, tales que su producto sea el polinomio dado. Un polinomio se llama irreducible cuando no se puede descomponer en factores."  
 $P(x)/(x-a)$  es exacta  $\Leftrightarrow R=P(a)=0 \Leftrightarrow P(x)$  es divisible por  $x-a \Leftrightarrow x-a$  es un factor de  $P(x)$
- Caso particular: descomposición factorial de una ecuación de 2º grado. Si  $ax^2+bx+c=0$  tiene por raíces (soluciones)  $x_1, x_2$ . Entonces  $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$   
Cálculo de la ecuación conocidas las raíces.  $(x-x_1)(x-x_2)=0$
- Métodos para factorizar polinomios:
  - Aplicar productos notables
  - Sacar factor común
  - Hallar las raíces  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$

- Comprobar si  $x=1$  y  $x=3$  son raíces de los siguientes polinomios:  
 $P_1(x) = x - 3$ ,  $P_2(x) = x^2 - 1$ ,  $P_3(x) = x^2 - 5x + 6$ ;  $P_4(x) = x^3 + x^2 - 2x$
- Comprobar si  $1 + \sqrt{3}$  es raíz de  $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2$  Sol: Sí
- De entre los números 0, 1, 2, 3, 4 ¿cuáles son raíces del polinomio  $P(x)=x^3-5x^2+4$ ? Sol:  $x=1$
- De los números 1, 0,  $\sqrt{2}$ ,  $-1$ ,  $2$  y  $-3$  decir cuáles son raíces y cuáles no, de cada uno de los polinomios siguientes:
  - $P(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$
  - $Q(x) = 2x^2 + 10x - 28$
  - $R(x) = x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2}$
  - $S(x) = x^3 + (1 + \sqrt{2})x^2 + \sqrt{2}x$
  - $I(x) = x$
 Sol: a) sí: 0, -1, -3; b) sí: 2; c) sí:  $\sqrt{2}$ , -1, d) sí: 0, -1, e) sí: 0
- Utilizando la regla de Ruffini, dar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:
  - $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 6$  por  $x - 3$
  - $P(x) = 5x^4 - 2x^2 + 5$  por  $x + 1$
  - $P(x) = 8x^3 - 5x^4 + 6x^2 - x + 8$  por  $x - 2$
  - $P(x) = 6x^3 - x + 16$  por  $x + 3$
- Comprobar que se verifica el Teorema del Resto en las divisiones del ejercicio anterior.
- Indicar, sin hacer la división si  $P(x)$  es divisible por  $D(x)$ :
  - $P(x) = 3x^3 - 21x + 18$ ;  $D(x) = x + 3$
  - $P(x) = 7x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x - 1$ ;  $D(x) = x - 1$
  - $P(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} + 4x^5$ ;  $D(x) = x - \frac{1}{2}$  Sol: son todos
- Como  $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ , decir si es cierto: a)  $(x+1)|(x^2 + 2x + 1)$  b)  $(x^2 + 2x + 1)|(x+1)$   
¿Cuál es el polinomio divisor? ¿Es  $x^2 + 2x + 1$  múltiplo de  $x + 1$ ? Sol:  $x+1$  es divisor y  $x^2+2x+1$  es un múltiplo.
- Como  $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ , decir si es cierto: a)  $(x-2)|(x^2 - 4x + 4)$  b)  $(x^2 - 4x + 4)|(x-2)$   
¿Cuál es el polinomio divisor? ¿Es  $x^2 - 4x + 4$  múltiplo de  $x - 2$ ? ¿Es  $x - 2$  divisible por  $x^2 - 4x + 4$ ?  
Sol: cierto a);  $x-2$ ; sí; no.

10. Encontrar 3 polinomios divisibles por a)  $3x^2 + 4x - 1$ , b)  $(x - 1)^2$

Sol: a)  $9x^2 + 12x - 3$ ;  $3x^4 + 4x^3 - x^2$ ;  $3x^3 + 7x^2 + 3x - 1$ , b)  $7(x - 1)^2$ ;  $(x - 1)^4$ ;  $(x - 1)^9$

11. Encontrar 3 polinomios divisores y dos múltiplos de  $p(x) = x^2(x^2 - 4)$  Sol:  $x^2$ ;  $x + 2$ ;  $x - 2$ ;  $x^3(x^2 - 4)$ ;  $x^2(x^2 - 4)^2$

12. Calcular a para que 3 sea raíz del polinomio  $x^3 - 6x^2 + ax - 2$  Sol:  $a = 29/3$

13. Hallar la descomposición factorial de los siguientes trinomios:

a)  $p(x) = x^2 + 2x - 3$  b)  $p(x) = 12x^2 - x - 1$  c)  $p(x) = x^3 - x^2 - 12x$  d)  $p(x) = x(x - 1) - 6(x - 2)$  e)  $p(x) = 5x - 2x^2 + 3$

Sol: a)  $p(x) = (x + 3)(x - 1)$ , b)  $p(x) = 12(x - 1/3)(x + 1/4)$ , c)  $p(x) = x(x - 4)(x + 3)$ , d)  $p(x) = (x - 4)(x - 3)$  e)  $p(x) = -2(x - 3)(x + 1/2)$

14. Escribir los polinomios cuyos ceros son:

a)  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 3$  b)  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 4$  c)  $x_1 = 1/2$ ;  $x_2 = 2$  d)  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = -3/2$

Sol: a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$ , b)  $x^2 - 3x - 4 = 0$ , c)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ , d)  $2x^2 + 7x + 6 = 0$

15. Factorizar los siguientes polinomios:

a)  $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$  b)  $P(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$  c)  $P(x) = x^3 - 4x$   
 d)  $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$  e)  $P(x) = (4x^2 - 9)(9x^2 - 16)$  f)  $P(x) = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$   
 g)  $P(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$  h)  $P(x) = 6x^4 - 150x^2 + 864$

Sol: a)  $(x - 1)(x - 3)(x - 5)$ ; b)  $(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 4)$ , c)  $x(x - 2)(x + 2)$ ; d)  $2(x - 1)(x + 2)(x - 3)$ ; e)  $(2x - 3)(2x + 3)(3x - 4)(3x + 4)$ ;  
 f)  $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5)$ ; g)  $x(x - 3)(x - 4)$ ; h)  $P(x) = 6(x - 3)(x + 3)(x - 4)(x + 4)$

16. Hallar al máximo común divisor de los siguientes polinomios:

a)  $P(x) = (x + 5)(x - 2)(x^2 + 3)$ ;  $Q(x) = x(x + 3)(x - 1)(x + 5)$   
 b)  $P(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x$ ;  $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$   
 c)  $P(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$ ;  $Q(x) = 4x^3 + 6x^2 - 22x - 12$   
 d)  $P(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + 1$ ;  $Q(x) = x^5 + x^4 + 2x^2 - 1$   
 e)  $P(x) = 3x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 12x - 9$ ;  $Q(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$   
 f)  $P(x) = x^2 + x - 2$ ;  $Q(x) = x - 1$  g)  $P(x) = x^4 - 1$ ;  $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$   
 h)  $P(x) = x^2 - 1$ ;  $Q(x) = x^2 - 2x + 1$ ;  $R(x) = x^2 + 2x - 3$  i)  $P(x) = x^2 + x + 1$ ;  $Q(x) = 2x + 5$

Sol: a)  $x + 5$ , b)  $x^2 - 3x + 2$ , c)  $x^2 + x + 6$ , d)  $x^3 + x + 1$ , e)  $x + 3$ , f)  $x - 1$ , g)  $x^2 - 1$ , h)  $x - 1$ , i) 1

17. Hallar el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios:

a)  $P(x) = x^2 + x - 12$ ;  $Q(x) = x^3 - 9x$  b)  $P(x) = x^2 + x - 12$ ;  $Q(x) = x^2 - 6x + 9$   
 c)  $P(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 2$ ;  $Q(x) = x^3 - 4x^2 - 10x + 4$  d)  $P(x) = x^7 - x$ ;  $Q(x) = x^5 + x^2$

Sol: a)  $x(x - 3)(x + 3)(x + 4)$ , b)  $(x + 4)(x - 3)^2$ , c)  $(x - 1)(x^3 - 4x^2 - 10x + 4)$  d)  $x^8 - x^2$ .

18. Resolver las siguientes ecuaciones:

a)  $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$  b)  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$  c)  $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0$   
 d)  $3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x = 0$  e)  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$  f)  $4x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0$  g)  $6x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 1 = 0$  h)  $4x^4 - x^3 - 28x^2 + 31x - 6 = 0$

Sol: a) -1, 3, 5; b) -1, 1, 2; c) -2, 2, 3, -4; d) 0, -1, 1, 2/3; e) 1, -2, 3; f) -1, -1/2, 1/2; g) -1, 1, -1/2, 1/3; h) -3, 1, 2, 5/2