PROBABILIDAD

1 Introducción.

Hemos visto la Estadística descriptiva, que es la más conocida de las dos existentes. Pero si la estadística consistiese solamente en un método para resumir datos, tendría escasa utilidad. Es el cálculo de probabilidades el que le da a la estadística su verdadero valor.

En efecto, el cálculo de probabilidades nos permitirá conocer las características de una población, extrayendo de ella una muestra fiable, hará valoraciones sobre la significación de los datos obtenidos, descubriendo una organización dentro del aparente desorden estadístico, y, finalmente, formulará, a partir del conocimiento estadístico del pasado, hipótesis sobre el futuro.

Para comenzar con la probabilidad hay que familiarizarse con su lenguaje.

2 Sucesos

Experimento o fenómeno **aleatorio**, es aquel que repetido en idénticas condiciones puede dar lugar a resultados diferente, es decir que jamás se puede redecir el resultado que se va a obtener.

Ejemplos: Ej. 1: Lanzar 2 monedas y anotar los resultados.

Ej. 2: Lanzar 3 dados y sumar los resultados

Ej. 3: Extraer una bola de una urna que contiene 2 bolas blancas y 3 azules.

Experimento determinista, es aquel que se puede predecir el resultado.

Ejemplo: Tirar una piedra desde 10 m. de altura y anotar la velocidad con la que llega al suelo.

Espacio muestral.

Es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento. Se denota por E, y cada uno de los elementos que lo forman se llaman casos o sucesos elementales.

Ejemplo: El experimento consistente en lanzar dos monedas al aire y anotar los resultados producidos tiene el siguiente espacio muestral: $E = \{cc, cx, xc, xx\}$.

Una forma sencilla de crear el espacio muestral es mediante los diagramas de árbol.

$$c \left\langle \begin{array}{l} c \to cc \\ x \to cx \end{array} \right. \qquad\qquad x \left\langle \begin{array}{l} c \to xc \\ x \to xx \end{array} \right.$$

El espacio muestral del experimento que consiste en lanzar un dado de quinielas es el siguiente: $E = \{1, X, 2\}$

Suceso aleatorio.

Es cualquier conjunto de resultados, es decir cualquier subconjunto de E.

Ejemplo: En el experimento que consiste en lanzar una dado con las caras numeradas del 1 al 6, el espacio muestral es $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ y como ejemplos de sucesos tenemos:

$A = \{2,4,6\}$ que es el suceso "salir número par"

$B = \{3,6\}$, suceso "salir múltiplo de 3"

$C = \{4\}$

Diremos que un suceso A se verifica si al realizar una prueba del experimento se obtiene un resultado perteneciente a A

En el ejemplo anterior si sacamos un 2 diremos que se verifica el suceso A y no el B

Tipos de sucesos.

Sucesos elementales: Están formados por un solo elemento.

Sucesos compuestos: Están formados por dos o más elementos.

Suceso seguro: Es el que se verifica siempre. Es el propio espacio muestral.

Suceso imposible: Es el que no se verifica nunca. Se expresa por ϕ.

Ejemplo: En el experimento anterior de lanzar un dado, tenemos:

$E = \{1,2,3,4,5,6\}$ (Suceso seguro)

$A = \{2,4,6\}$ (Suceso compuesto)

$C = \{4\}$ (Suceso elemental).

El suceso imposible sería no obtener ninguno de los números que figuran en sus caras.

El conjunto de todos los sucesos de un espacio muestral recibe el nombre de espacio de sucesos y se designa por S.

Si consideramos el experimento consistente en lanzar una moneda el espacio muestral será $E = \{c, x\}$ y el espacio de sucesos $S = \left\{\varnothing, \{c\},\ \{x\},\ E\right\}$.

Sucesos contrarios o complementarios. Dado un suceso cualquiera A, se llama suceso contrario de A, lo denotaremos por $\overline{A}$, A' o A^c a un suceso que se verifica cuando no se verifica A.

En el ejemplo anterior de lanzar el dado $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ y $\overline{C} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

Nótese que la unión de un suceso y de su complementario da siempre el espacio muestral.

Sucesos incompatibles.

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando no tienen ningún caso en común $A \cap B = \varnothing$

Cuando pueden verificarse ambos a la vez se llaman compatibles.

Si A y B son incompatibles, entonces $A \cap B = \varnothing$

Si A y B son compatibles, entonces $A \cap B \neq \varnothing$

En el experimento de lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6,

- son sucesos compatibles $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{2,4,6\}$.
- son incompatibles $P = \{2,4,6\}$ e $I = \{1,3,5\}$

Sistema completo de sucesos.

De una manera general, se dice que los sucesos $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ constituyen un sistema completo de sucesos para un determinado experimento si se verifica:

1º) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ......\cup A_n = E$.

2º) Los sucesos $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ son incompatibles dos a dos.

Operaciones con sucesos.

Inclusión: $A \subset B$, si cuando se verifica A, también se verifica B.

Unión: $A \cup B$, se verifica cuando se verifica A o se verifica B.

Intersección: $A \cap B$, se verifica cuando se verifica A y se verifica B.

Propiedades de las operaciones:

Unión de sucesos	Intersección de sucesos	Suceso contrario
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup \overline{A} = E$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$\overline{E} = \varnothing$
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	$\overline{\varnothing} = E$
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$A \cup E = E$	$A \cap E = A$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3 Propiedades de la probabilidad.

Ley de los Grandes Números

Hemos dicho que en un experimento aleatorio es imposible predecir el resultado de una prueba aislada, o si se producirá en ella, o no, un determinado suceso. Pero la realización de numerosas pruebas nos permite observar que se cumple " la ley de los grandes números"

"En un experimento, al realizar un gran número N de pruebas, la frecuencia relativa de un cierto suceso A, tiende a estabilizarse, aproximadamente a un valor fijo. A este número se le llama probabilidad de A y se denota por p(A)

Cuando lanzamos una moneda muchas veces la frecuencia relativa del suceso "salir cara" tiende a aproximarse al valor de 0,5, decimos entonces que la $P(\{c\}) = 1/2$

Esta definición presenta un inconveniente de tipo práctico: para calcular la probabilidad de un suceso sería necesario realizar un gran número de pruebas, con el fin de obtener experimentalmente el valor al que se aproximan las frecuencias relativas.

Regla de Laplace

“Si todos los sucesos son equiprobables, la probabilidad de un suceso A, es el cociente entre el número de casos favorables entre el número de casos posibles:

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favorables}}{\textit{número de casos posibles}}$$

Para el recuento del número de casos podemos utilizar los diagramas de árbol o el análisis combinatorio.

Esta definición clásica de probabilidad tiene el inconveniente de que para su aplicación hay que suponer que todos los sucesos elementales son igualmente probables.

Definición general o axiomática de probabilidad

Para subsanar esta deficiencia se construye la definición general o axiomática de probabilidad que absorbe a la definición clásica.

La probabilidad es una función que asocia a cada suceso A, del espacio de sucesos, un número real que representamos por p(A), que cumple los siguientes condiciones: AXIOMAS:

Ax.1. $p(C) \geq 0,$ para cualquiera que sea $C \in S$

Ax.2. $Si \;\; A \cap B = \varnothing, \;\; entonces \;\; p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Ax.3: $p(E) = 1$

Con estos axiomas se demuestran las siguientes propiedades:

P1 $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

P2 $p(\varnothing) = 0$

P3 $Si \;\; A \subset B, \;\; entonces \;\; p(A) \leq p(B)$

P4 Si dos sucesos son compatibles entonces $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

P5 $Si \;\; E = \{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n\} \;\; entonces \;\; p(S_1) + p(S_2) + p(S_3) + \cdots + p(S_n) = 1$

4 Probabilidad condicionada. Sucesos independientes.

Experimento compuesto.

Son los formados por varios experimentos simples.

Ejemplo: Lanzar un dado y una moneda.

Se denomina **espacio producto** al conjunto de todos los resultados elementales de un experimento compuesto.

La probabilidad de un suceso elemental de un experimento compuesto puede calcularse multiplicando las probabilidades de los sucesos elementales que conforman la experiencia compuesta.

Sucesos independientes.

Dos sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Nota: Dos sucesos A y B son independientes cuando para que se verifique A no influye que se haya o no verificado B.

Ejemplo sucesos independientes.

Un obrero vigila dos máquinas de tejer A y B. La máquina A exige una intervención con una probabilidad de 1/7 durante una hora y la máquina B con una probabilidad de 1/5, en el mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de no ser molestado en una hora?

Las dos máquinas son independientes. La probabilidad de que se averíe la máquina A no depende de la máquina B.

Por tanto la probabilidad de no ser molestados, es la probabilidad de que no se averíe la máquina A y no se averíe la máquina B

$$p(A\,no\ avería\ \ y\ \ B\ no\ avería) = p(A\,no\ avería\ \cap\ B\ no\ avería) = \left(1-1/7\right) \cdot \left(1-1/5\right) = 6/7 \cdot 4/5 = 24/35$$

Ejemplo sucesos dependientes.

Un conductor sobrio tiene una probabilidad entre 1 000 de tener un accidente de coche; un conductor ebrio tiene una probabilidad entre 50 de tener accidente a lo largo del tiempo. Se admite que un conductor entre 100 conduce en estado ebrio.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya un accidente y el conductor esté ebrio?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un conductor tenga accidente?
c) Supongamos que se ha producido un accidente. ¿Cuál es la probabilidad de que el conductor esté ebrio?

Los sucesos “conducir ebrio” y “tener accidente” son sucesos claramente dependientes.

Para expresar en términos de probabilidad este ejemplo, es necesario definir la probabilidad condicionada.

4.1 Probabilidad condicionada.

Dados dos sucesos A y B se llama probabilidad de A condicionada a B y se escribe $p(A/\mathrm{B})$ a:

$p(A/\mathrm{B})=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ que mide la probabilidad de que se verifique A sabiendo que se ha verificado B.

Como consecuencia tenemos que:

$$P(A\cap B)=P(B/A)\cdot P(A)$$

$$P(A\cap B)=P(A/B)\cdot P(B)$$

Si A y B son independientes, entonces $P(B/A)=\dfrac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)}=P(B)$

Ahora la respuesta al apartado a) será:

$$p(conducir\ \ ebrio\ \ y\ \ accidente)=p(conducir\ \ ebrio)\cdot p(accidente/conduce\ ebrio)=$$
$$=\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{50}=\frac{1}{5000}$$

4.2 Teorema de la probabilidad total

Se desea conocer la probabilidad que se verifique el suceso B, que puede ser debida a varias causas $A_1, A_2, \cdots, A_n$

Sean $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ un sistema completo de sucesos, es decir que $A_i\cap A_j=\phi$ y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=E$.

Entonces $\quad P(B)=p(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)+...P(B/A_n)$, $\forall B\in S$

Este teorema nos permite contestar al apartado b) de nuestro ejemplo:

$$p(accidente)=p(\text{"}ebrio\ \ y\ \ accidente\text{"}\ o\ \text{"}sobrio\ \ y\ \ accidente\text{"})=$$
$$=p(\text{"}ebrio\cap accidente\text{"}\cup\text{"}sobrio\cap accidente\text{"})=$$
$$=p(ebrio)\,p(accidente/\mathrm{ebrio})+p(sobrio)\,p(accidente/sobrio)=$$
$$=\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{50}+\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{1000}=\frac{119}{100000}$$

4.3 Teorema de Bayes

Ahora la situación es inversa a la anterior. Suponemos que ha ocurrido el suceso B, se trata de encontrar la probabilidad de que se haya debido a una de las causas. Es una probabilidad a "posteriori".

Sean $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ un sistema completo de sucesos.

$$\mathrm{p}(A_i / B) = \frac{\mathrm{p}(A_i)\,\mathrm{p}(B / A_i)}{\mathrm{p}(A_1)\,p(B / A_1) + \mathrm{p}(A_2)\,p(B / A_2) + ...\mathrm{p}\left(A_n\right)\mathrm{p}(B / A_n)}, \quad \forall B \in S$$

De forma más sencilla diremos:

$$\mathrm{p}(A / B) = \frac{\mathrm{p}(A)\,\mathrm{p}(B / A)}{\mathrm{p}(A)\,p(B / A) + p(\overline{A})\,\mathrm{p}(B / \overline{A})}, \quad \forall B \in S$$

Volviendo a nuestro ejemplo el aparatado c) es uno de estos casos. Se ha producido un accidente y nos preguntan cuál es la probabilidad de que el conductor estuviese ebrio.

$$p\left(estar\ \ ebrio / accidente\right) = \frac{p(ebrio\ \ y\ \ accidente)}{p\left(accidente\right)} =$$

$$= \frac{p\left(ebrio\right) p\left(accidente / ebrio\right)}{p\left(ebrio\right) p\left(accidente / ebrio\right) + p\left(sobrio\right) p\left(accidente / \mathrm{sobrio}\right)} = =$$

$$= \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{50}}{\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{50} + \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{1000}} = \frac{21}{125}$$

5 Cálculo de probabilidades en experiencias compuestas.

Otra forma de ver este tipo de ejercicios es utilizando los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.

Podemos recoger la información en un diagrama de árbol:

$\xrightarrow{1/100}$ *Conducir Ebrío* $\xrightarrow{1/50}$ *Accidente*

Conducir Ebrío $\xrightarrow{49/50}$ $\overline{Accidente}$

$\xrightarrow{99/100}$ *Conducir Sobrio* $\xrightarrow{1/1000}$ *Accidente*

Conducir Sobrio $\xrightarrow{999/1000}$ $\overline{Accidente}$

Y a partir de él construir la tabla de contingencia de las probabilidades:

$\cap$	Accidente	No accidente	TOTAL
Conducir ebrio	0,01·0,02	0,01·0,98	0,01
Conducir sobrio		0,99·0,999	0,99
TOTAL	0,00119	0,99881	1

A partir de esta tabla las contestaciones a todos los apartados del ejemplo son muy sencillas:

a) $p(conducir\ \ ebrio\ \ y\ \ accidente) = cailla\, a_{11} = 0,01 \cdot 0,02 = \dfrac{1}{5000}$

b) $p(accidente) = casilla\ \ a_{13} = 0,00119 = \dfrac{119}{100\,000}$

c) $p(estar\ \ ebrio / accidente)$ la información nos restringe el espacio muestral y nos quedamos con la primera columna

$$p(estar\ \ ebrio / accidente) = \frac{a_{11}}{a_{13}} = \frac{0,01 \cdot 0,02}{0,00119} = \frac{21}{125}$$

Ejemplo:

Supongamos una población en la que el 1% tiene una enfermedad.

Empleamos un test que nos permite detectar la enfermedad 8 veces sobre 10 en un sujeto enfermo (test positivo). Y detectar la no existencia de dicha enfermedad 9 veces sobre 10 en un sano (test negativo) ¿Cuál es la probabilidad de que un sujeto que ha dado test positivo esté realmente enfermo?

$\overset{1/100}{\nearrow}$ $Estar\ \ enfermo$ $\overset{8/10}{\nearrow}$ $Test\ \ positivo$

$\underset{2/10}{\searrow}$ $Test\ \ negativo$

$\overset{99/100}{\searrow}$ $Estar\ \ sano$ $\overset{1/10}{\nearrow}$ $Test\ \ positivo$

$\underset{9/10}{\searrow}$ $Test\ \ negativo$

La tabla de contingencia es:

$\cap$	Test positivo	Test negativo	TOTAL
Estar enfermo	0,01·0,8	0,01·0,2	0,01
Estar sano	9·0,1	0,99·0,9	0,99
TOTAL	0,107	0,893	1

Nos pide $p(estar\ \ enfermo / test\ \ positivo) = \dfrac{0,01 \cdot 0,8}{0,107} = 0,747$

Utilizando el Teorema de Bayes: $p(estar\ \ enfermo / test\ \ positivo) = \dfrac{\dfrac{1}{100} \cdot \dfrac{8}{10}}{\dfrac{1}{100} \cdot \dfrac{8}{10} + \dfrac{99}{100} \cdot \dfrac{1}{10}} = 0,747$

Ejemplo: También podemos tener tablas de contingencia que no recojan las probabilidades sino los datos.

Observar la siguiente tabla que representa a los empleados de una empresa:

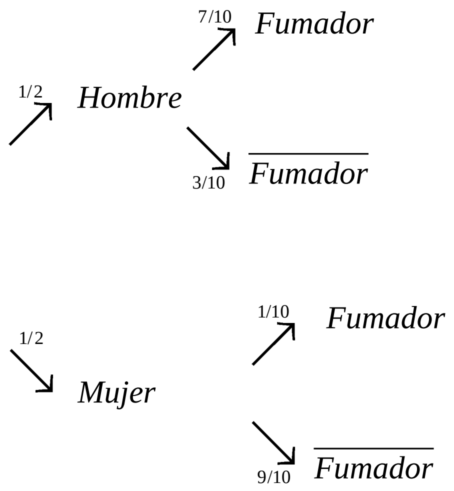
	Hombres (H)	Mujeres (M)
Fuman (F)	70	10
No fuman (no F)	30	90

Calcular la probabilidad de:

a) Ser mujer y fumadora.
b) Ser hombre.
c) Ser mujer.
d) Sabiendo que hemos elegido un fumador ¿qué es más probable que sea hombre o mujer?

Construir la tabla de contingencia total:

	Hombres (H)	Mujeres (M)	total
Fuman (F)	70	10	80
No fuman (no F)	30	90	120
Total	100	100	200



a) $p\left(mujer\ \ y\ \ fumadora\right)=\dfrac{casilla\ a_{12}}{casilla\ a_{33}}=\dfrac{10}{200}=\dfrac{1}{20}$

b) $P(H)=\dfrac{100}{200}=\dfrac{1}{2}$

c) $P(M)=\dfrac{100}{200}=\dfrac{1}{2}$

d) $P(H\ /\ fumador)=P(H\ /\ F)=\dfrac{70}{80}=\dfrac{7}{8}$

$P(M\ /\ fumador)=P(M\ /\ F)=\dfrac{10}{80}=\dfrac{1}{8}$

Es mucho más probable que sea hombre que mujer.

Estas probabilidades pueden obtenerse también de la forma siguiente:

$$P(H\ /\ F)=\frac{P(H\cap F)}{P(F)}=\frac{70/200}{80/200}=\frac{7}{8}$$

$$P(M\ /\ F)=\frac{P(M\cap F)}{P(F)}=\frac{10/200}{80/200}=\frac{1}{8}$$

6 Ejercicios resueltos

1.- En un hospital ha habido 200 nacimientos. De ellos 105 son niños y, de estos, 21 tienen ojos azules. Asimismo, se ha observado que 38 de las niñas nacidas en ese hospital tiene ojos azules. Calcular la probabilidad de que, al elegir a un recién nacido al azar:

a) Tenga los ojos azules.
b) Sea niño.
c) Sabiendo que el recién nacido elegido es una niña ¿cuál es la probabilidad que tenga los ojos azules?
d) ¿Son independientes los sucesos ser niño y tener los ojos azules?

Solución:

Tabla de contingencia de frecuencias absolutas

	Niños	Niñas	Total
Ojos Azules	**21**	**38**	59
Otro color	105-21=84	95-38=57	200-59=141
Total	**105**	200-105=95	**200**

Diagrama de árbol

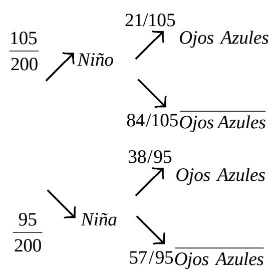


Tabla de contingencia de probabilidades

$\bigcap$	Niños	Niñas	Total
Ojos Azules	0,105	0,19	0,295
Otro color	0,42	0,285	0,705
Total	0,525	0,475	1

a) Por la tabla de contingencia de frecuencias absolutas sería: P(Ojos Azules)= $\frac{59}{200} = 0{,}295$

Por la tabla de contingencia de probabilidades sería la casilla a_{13}: P(Ojos Azules)=$=0,295$

Por el diagrama de árbol: P(Ojos Azules)=$\frac{\cancel{105}}{200}\cdot\frac{21}{\cancel{105}}+\frac{\cancel{95}}{200}\cdot\frac{38}{\cancel{95}}=\frac{59}{200}=0,295$

b) P(niño)=105/200 (casilla a_{31}=0,525)

c) P(Ojos Azules/niña)=$\frac{P(niña \cap Ojos\ \ Azules))}{P(niña)}=\frac{38/200}{95/200}=0,4$ (casilla a_{12}/casilla a_{32})

d) Para que sean independientes

$$P(niño \cap Ojos\ \ Azules) = P(niño).\mathrm{P}(Ojos\ Azules) \ \Leftrightarrow \frac{21}{200} \neq \frac{59}{200}\cdot\frac{105}{200} \ \ son\ \ dependientes$$

2.- Se extraen sucesivamente dos cartas de una baraja. Calcula la probabilidad de que sean dos reyes.

Solución:

Sea R_1=”sacar rey en la 1ª extracción” y R_2=”sacar rey en la 2ª extracción.

Se pide la probabilidad del suceso $R_1 \cap R_2$:

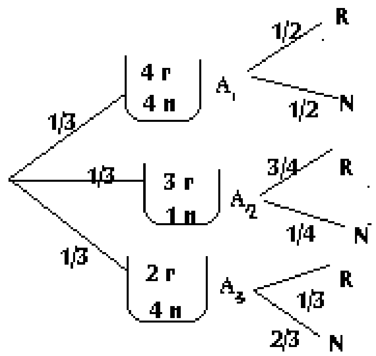
$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1).P(R_2 / R_1) = \frac{4}{40}.\frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

3.- Tenemos tres urnas. La primera contiene 4 bolas rojas y 4 negras, la segunda 3 rojas y 1 negra y la tercera 2 rojas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y después extraemos una bola.

a) Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

b) Si la bola extraída ha sido roja, calcular la probabilidad de que proceda de la primera urna.

Solución



Las probabilidades son las que se muestran en el diagrama.

Tabla de contingencia:

$\cap$	R	N	Totales
A_1	1/6	1/6	1/3
A_2	1/4	1/12	1/3
A_3	1/9	2/9	1/3
Totales	19/36	17/36	

a) Teniendo en cuenta que hay tres caminos para llegar a la bola negra, podemos escribir:

$$P(N) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{4} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{2}{9} = \frac{6+3+8}{36} = \frac{17}{36}$$

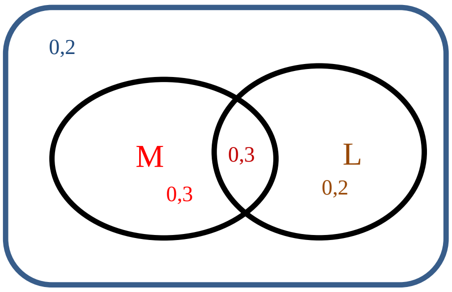
b) Para resolver el problema hemos de calcular, en primer lugar, la probabilidad de obtener bola roja por un procedimiento análogo al utilizado para obtener bola negra, es decir,

$$P(R) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{3}{4} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{6+9+4}{36} = \frac{19}{36}$$

Entonces resulta: $P(A_1 / R) = \dfrac{P(A_1 \cap R)}{P(R)} = \dfrac{1/3 \cdot 1/2}{19/36} = \dfrac{1/6}{19/36} = \dfrac{36}{19.6} = \dfrac{6}{19}$

4.- La probabilidad de que un alumno apruebe Matemáticas es de 0,6, la de que apruebe Lengua es 0,5 y la de apruebe las dos 0,3. Se elige un alumno al azar, calcula las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que apruebe al menos una asignatura.
b) Probabilidad de que no apruebe ninguna.



Sea M el suceso "aprueba Matemáticas" y L el suceso "aprueba Lengua"

p(apruebe al menos una asig.)=
$p(M \cup L) = p(M) + p(L) - p(M \cap L) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}8$

El suceso contrario de aprobar al menos una asignatura es no aprobar ninguna, por tanto,

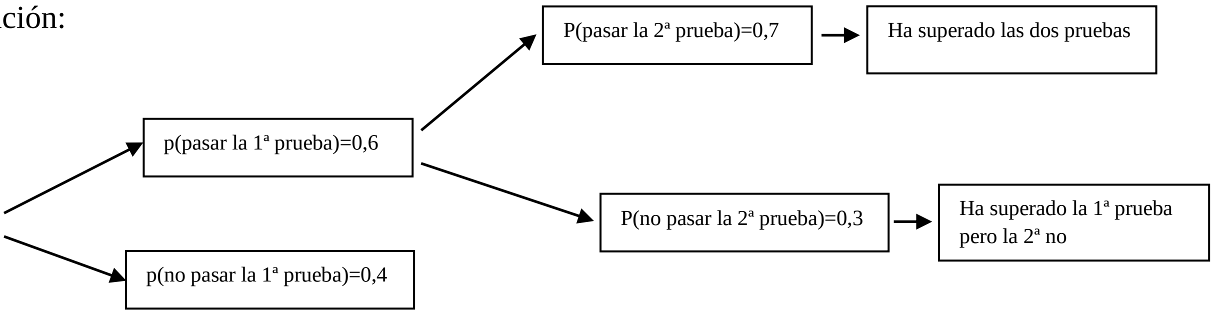
p(no apruebe ninguna)= $\overline{M \cup L}) = 1 - p(M \cup L) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

5.- Un examen consta de 2 pruebas que hay que superar para aprobar. Sabemos que la probabilidad de pasar la 1ª prueba es 0,6 y la de pasar la 2ª es 0,7.

a.- Cuál es la probabilidad de aprobar el examen?

b.- Calcula la probabilidad de suspender el examen en la segunda prueba.

Solución:



El camino que nos lleva a la meta "Ha superado las dos pruebas" se obtiene multiplicando las probabilidades, es decir, P(aprobar el examen)=(0,6).(0,7)=0,42

El camino para llegar a la meta "Ha superado la 1ª prueba pero la 2ª no" se resuelve de la misma manera, es decir,

- P(superar la primera prueba pero la 2ª no)=(0,6).(0,3)=0,18

<u>Otra manera:</u>

Sea A el suceso "pasar la 1ª prueba" y B el suceso "pasar la 2ª prueba"

Se cumple entonces que $p(A) = 0{,}6$; $p(\overline{A}) = 0{,}4$; $p(B) = 0{,}7$; $p(\overline{B}) = 0{,}3$

p(aprobar el examen)= $p(A \cap B) = p(A).p(B) = (0{,}6).(0{,}7) = 0{,}42$

p(superar la primera prueba pero no la segunda)= $p(A \cap \overline{B}) = p(A).p(\overline{B}) = (0{,}6).(0{,}3) = 0{,}18$

7 Ejercicios propuestos

1) En una urna hay 15 bolas numeradas de 2 al 16. Extraemos una bola al azar y observamos el número que tiene.

a) Describe los sucesos: A = "Obtener par", B = "Obtener impar", C = "Obtener primo", D = "Obtener impar menor que 9" escribiendo todos sus elementos.

b) ¿Qué relación hay entre A y B? ¿Y entre C y D?

c) ¿Cuál es el suceso $A \cap B$? ¿y $C \cap D$?

2) Sean A y B los sucesos tales que: P(A)= 0,4 P(A' $\cap$ B) = 0,4 P(A $\cap$ B = 0,1

Calcular P(A $\cup$ B) y P(B). Sol: 0,8; 0,5

3) Sabiendo que: $P(A \cap B) = 0,2$ $P(\overline{B}) = 0,7$ $P(A \cap \overline{B}) = 0,5$

Calcular: $P(A \cup B)$ y $P(A)$ Sol: 0,8; 0,7

4) Dos personas eligen al azar, cada una de ellas, un número del 0 al 9. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos personas no piensen el mismo número? Sol: 0,9

5) Extraemos dos cartas de una baraja española (de cuarenta cartas). Calcular la probabilidad de que sean:

a) Las dos de oros. Sol: 3/52

b) Una de copas u otra de oros. Sol: 5/39

c) Al menos una de oros. Sol:23/52

d) La primera de copas y la segunda de oro. Sol: 5/78

6) Tenemos dos bolsas, A y B. En la bolsa A hay 3 bolas blancas y 7 rojas. En la bolsa B hay 6 bolas blancas y 2.rojas. Sacamos una bola de A y la pasamos a B. Después extraemos una bola de B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de B sea blanca? Sol: 7/10

b) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas? Sol: 7/30

7) En unas oposiciones, el temario consta de 85 temas. Se eligen tres temas al azar de entre los 85. Si un opositor sabe 35 de los 85 temas, ¿cuál es la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas? Sol: 0,802

8) Tenemos para enviar tres cartas con sus tres sobres correspondientes. Si metemos al zar cada carta en uno de los sobres, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas vaya en el sobre que le corresponde? Sol: 2/3

9) En un viaje organizado por Europa para 120 personas, 48 de los que van saben hablar inglés, 36 saben hablar francés, y 12 de ellos hablan los dos idiomas. Escogemos uno de los viajeros al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alguno de los dos idiomas? Sol: 0,6

b) ¿Cuál es la probabilidad de que hable francés, sabiendo que habla inglés? Sol: 0,25

c) ¿Cuál es la probabilidad de que solo hable francés? Sol: 0,2

10) Una urna, A, contiene 7 bolas numeradas del 1 al 7. En otra urna, B, hay 5 bolas numeradas del 1 al 5. Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que, si sale cara, extraemos una bola de la urna A y, si sale cruz, la extraemos de B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par? Sol: 29/70

b) Sabiendo que salió un número par, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la urna A? Sol: 15/29

11) Se hace una encuesta en un grupo de 120 personas, preguntando si les gusta leer y ver la televisión. Los resultados son:

”a 32 personas les gusta leer y ver la tele”

“a 92 personas les gusta leer”

“a 47 personas les gusta ver la tele”.

Si elegimos al azar una de esas personas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no le guste ver la tele? Sol: 73/120

b) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste leer, sabiendo que le gusta ver la tele? Sol: 32/47

c) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste leer? Sol: 23/30

12) El 1% de la población de un determinado lugar padece una enfermedad. Para detectar esta enfermedad se realiza una prueba de diagnóstico. Esta prueba da positiva en el 97% de los pacientes que padecen la enfermedad; en el 98% de los individuos que no la padecen da negativa. Si elegimos al azar un individuo de esa población:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo dé positivo y padezca la enfermedad? Sol: 0,0097

b) Si sabemos que ha dado positiva, ¿cuál es la probabilidad de que padezca la enfermedad?
Sol: 0,33

13) En una clase de 30 alumnos hay 18 que han aprobado matemáticas, 16 que han aprobado inglés y 6 que no han aprobado ninguna de las dos. Elegimos al azar un alumno de esa clase:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés y matemáticas? Sol: 1/3

b) Sabiendo que ha aprobado matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés? Sol 5/9

c) ¿Son independientes los sucesos "Aprobar matemáticas" y "Aprobar inglés"? Sol: dependientes.

14) En un pueblo hay 100 jóvenes; 40 de los chicos y 35 de las chicas juegan al tenis. El total de chicas en el pueblo es de 45. Si elegimos un joven de esa localidad al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico? Sol: 11/20

b) Si sabemos que juega al tenis, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica? Sol: 7/15

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico que no juegue al tenis? Sol: 3/20

15) Una bola bolsa, A, contiene 3 bolas rojas y 5 verdes. Otra bolsa, B, contiene 6 bolas rojas y 4 verdes. Lanzamos un dado: si sale un uno, extraemos una bola de la bolsa A; y si no sale un uno, la extraemos de B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola roja? Sol: 9/16

b) Sabiendo que salió roja, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de A? Sol: 1/9

16) En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2 500 personas para saber la audiencia de un debate y de una película que se emitieron en horas distintas: 2 100 vieron la película, 1 500 vieron el debate y 350 no vieron ninguno de los dos programas. Si elegimos al azar a uno de los encuestados:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película y el debate? Sol: 29/50

b) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película, sabiendo que no vio el debate? Sol: 29/30

c) Sabiendo que vio la película, ¿cuál es la probabilidad de que viera el debate? Sol: 29/42

17) Tenemos dos urnas: la primera tiene 3 bolas rojas, 3 blancas y 4 negras; la segunda tiene 4 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra. Elegimos una urna al azar y extraemos una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca? Sol: 27/80

b) Sabiendo que la bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la primera urna? Sol: 4/9