Resuelve

Página 53

1 **I. Una cantidad C aumenta un 10 % y, después, disminuye un 5 %.**

II. Una cantidad C disminuye un 5 % y, después, aumenta un 10 %.

El resultado final de I, ¿es mayor, igual o menor que el de II?

Ambos resultados son iguales porque la cantidad final podemos calcularla, usando los índices de variación, de la siguiente forma:

I. $C \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 1{,}045C$

II. $C \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1{,}045C$

2 **Si una cantidad C aumenta un 10 % y, después, el resultado disminuye un 10 %, lo que resulta es… ¿mayor, igual o menor que C?**

Usando los índices de variación, obtenemos:

$$C \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 0{,}99C$$

Como el coeficiente de C es un número menor que 1, la cantidad final es menor que C. Concretamente es el 99 % de C.

3 **En una reunión hay 30 personas, de las cuales el 30 % lleva gafas. Solo el 20 % de las mujeres llevan gafas, pero el 35 % de los hombres las usan. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?**

Llamamos x al número de mujeres e y al número de hombres que hay en la reunión. Como el 30 % del total usan gafas, 30 % · 30 = 9 personas las llevan. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 30 \\ \frac{20}{100}x + \frac{35}{100}y = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 30 \\ 20x + 35y = 900 \end{array}\right\} \rightarrow x = 10,\ y = 20$$

A la reunión asisten 10 mujeres y 20 hombres.

4 **Nos han concedido un préstamo de 20 000 € por el que hemos de pagar un 8 % anual. Un año después devolvemos 10 000 €. Al finalizar el segundo año deseamos saldar la deuda. ¿Cuánto habremos de pagar?**

Los intereses de 20 000 € durante 1 año son $\frac{20\,000 \cdot 8}{100} = 1\,600$ €.

De los 10 000 € devueltos, 1 600 € son para pagar los intereses del primer año y el resto, es decir, 10 000 – 1 600 = 8 400 €, se descuentan del dinero que nos han prestado.

Por tanto, todavía quedan por devolver 20 000 – 8 400 = 11 600 € más los intereses que generan en un año.

Esos intereses son $\frac{11\,600 \cdot 8}{100} = 928$ €.

La cantidad final que debemos pagar, después de devolver los 10 000 € es:

11 600 + 926 = 12 526 €

1 Aumentos y disminuciones porcentuales

Página 54

1 **Una raqueta de tenis valía, al comienzo de temporada, 40 euros. A lo largo del año sufrió las siguientes variaciones: subió un 20 %, bajó un 25 %, subió un 5 % y, finalmente, bajó un 12 %.**

a) ¿Cuál ha sido su índice de variación global?

b) ¿Cuánto vale al final de temporada?

c) ¿Qué porcentaje ha de subir para volver a costar 40 €?

a) Índice de variación = 1,2 · 0,75 · 1,05 · 0,88 = 0,8316 (baja el precio un 16,84 %)

b) Precio final = 40 · 1,2 · 0,75 · 1,05 · 0,88 = 33,26 €

c) Como el precio final es de 33,26 €, hasta llegar a los 40 € debe subir:

$$40 - 33{,}26 = 6{,}74 \text{ €} \;\rightarrow\; \frac{6{,}74}{33{,}26} \cdot 100 = 20{,}26\,\%$$

Página 55

Hazlo tú

1 **Averigua en cuánto se queda un artículo de 100 € cuyo valor se aumenta un r % y, a continuación, se rebaja un r %, para $r = 10$, $r = 20$, $r = 50$ y $r = 80$. ¿Cuál es la pérdida en cada caso?**

- $r = 10 \;\rightarrow\; 100 \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{10}{100}\right) = 100 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}9 = 99$ € $\rightarrow$ La pérdida de valor es de 1 €.
- $r = 20 \;\rightarrow\; 100 \cdot \left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{20}{100}\right) = 100 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 96$ € $\rightarrow$ La pérdida es de 4 €.
- $r = 50 \;\rightarrow\; 100 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 75$ € $\rightarrow$ La pérdida de valor es de 25 €.
- $r = 80 \;\rightarrow\; 100 \cdot 1{,}8 \cdot 0{,}2 = 36$ € $\rightarrow$ La pérdida de valor es de 64 €.

2 **Calcula cuál será el precio inicial en cada caso:**

a) Después de aumentar un 21 %, un artículo cuesta 332,75 €.

b) Después de rebajar un 16 %, un artículo cuesta 18,48 €.

¿Qué porcentaje de aumento o de rebaja hay que hacer para dejar los artículos con el precio inicial?

a) $\frac{332{,}75}{1{,}21} = 275$ € es el precio inicial.

Para dejar el artículo con su precio inicial, hay que aplicar la siguiente rebaja:

$$332{,}75 \cdot \left(1-\frac{r}{100}\right) = 275 \;\rightarrow\; 57{,}75 = 3{,}3275 \cdot r \;\rightarrow\; r = 17{,}36\,\%$$

b) $\frac{18{,}48}{0{,}84} = 22$ € es el precio inicial.

Para dejar el artículo con su precio inicial, hay que aplicar el siguiente aumento:

$$18{,}48 \cdot \left(1+\frac{r}{100}\right) = 22 \;\rightarrow\; 0{,}1848 \cdot r = 3{,}52 \;\rightarrow\; r = 19{,}05\,\%$$

2 **Después de subir un 20 %, un artículo vale 45,60 euros. ¿Cuánto valía antes de la subida?**

$1{,}2x = 45{,}60 \;\rightarrow\; x = 38$ €

3 **Después de rebajarse en un 35 %, un artículo vale 81,90 euros. ¿Cuánto valía antes de la rebaja?**

$0{,}65x = 81{,}90 \;\rightarrow\; x = 126$ €

3 Intereses bancarios

Página 57

Hazlo tú. ¿En cuánto se transforma un capital de 50 000 €, colocado al 12 % anual, en 1, 2, 3, 4 y 5 años?

En 1 año se transforma en $50\,000 \cdot 1{,}12 = 56\,000$ €.

En 2 años se transforma en $50\,000 \cdot 1{,}12^2 = 62\,720$ €.

En 3 años se transforma en $50\,000 \cdot 1{,}12^3 = 70\,246{,}40$ €.

En 4 años se transforma en $50\,000 \cdot 1{,}12^4 = 78\,675{,}97$ €.

En 5 años se transforma en $50\,000 \cdot 1{,}12^5 = 88\,117{,}08$ €.

Hazlo tú. ¿Cuántos años se necesitan para que 50 000 € colocados al 8 % anual se conviertan en 125 000 €?

$$50\,000 \cdot 1{,}08^n = 125\,000 \ \rightarrow \ 1{,}08^n = \frac{125\,000}{50\,000} \ \rightarrow \ 1{,}08^n = 2{,}5 \ \rightarrow \ n = \frac{\log 2{,}5}{\log 1{,}08} = 11{,}91$$

Se necesitan 12 años y se obtendrá una cantidad ligeramente superior a 125 000 €.

Página 58

1 **Averigua en cuánto se transforma un capital de 100 000 € al 6 % anual durante 4 años si los periodos de capitalización son:**

a) años

b) meses

c) días

d) trimestres

a) $100\,000 \cdot 1{,}06^4 = 126\,247{,}70$ €

b) $100\,000 \cdot 1{,}005^{48} = 127\,048{,}92$ €

c) $100\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{6}{36\,500}\right)^{1\,460} = 127\,122{,}41$ €

d) $100\,000 \cdot 1{,}015^{16} = 126\,898{,}55$ €

4 ¿Qué es la "tasa anual equivalente" (T.A.E.)?

Página 59

1 Un banco nos concede un préstamo de 10 000 € al 12 % anual. En el momento de la formalización nos cobra unos gastos de 500 €.

a) Si realizamos un solo pago al cabo de un año, ¿cuál es la T.A.E.?

b) ¿Y si tuviéramos que devolver el préstamo íntegro al cabo de dos años?

(Para resolverlo, ten en cuenta que aunque los pagos los hacemos sobre un préstamo de 10 000 €, lo que realmente recibimos fue 9 500 €).

a) Nos dieron 9 500 € y hemos de devolver $10\,000 \cdot 1{,}01^{12} = 11\,268{,}25$ €.

$\frac{11268{,}25}{9500} = 1{,}18613\ldots$ Por tanto, la T.A.E. será del 18,61 %.

b) Como nos dan 9 500 € y tenemos que devolver $10\,000 \cdot 1{,}01^{24} = 12\,697{,}35$ el aumento en dos años es:

$\frac{12\,697{,}35}{9500} = 1{,}336563$

Llamando x a la T.A.E.: $\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = 1{,}336563 \rightarrow 1 + \frac{x}{100} = 1{,}1561$

En este caso, la T.A.E. es del 15,61 %.

El ejercicio anterior está mal, ha considerado pagos mensuales.

a) Nos dieron 9500€ y hemos de devolver 10000.1,12=11200€

Cf=Ci.(1+x/100)

11200=9500(1+x/100)

1+x/100=11200/9500

x/100=1,1789-1

x=17,89% TAE

b) Si es en dos años tenemos que devolver $10\,000 \cdot (1{,}12)^2$ =12544€

Igual que antes:

$Cf=Ci.(1+x/100)^2$

$12\,544=9\,500.(1+x/100)^2$

$(1+X/100)^2 = 12\,544/9\,500$

1+X/100 = 1,1491

X/100 = 0,1491

X = 14,91 % TAE

Página 61

Hazlo tú. Recibimos un préstamo de 25 000 € al 6 % anual que hemos de amortizar en 6 pagos anuales de 4 067,25 €. Comprueba que la anualidad es la correcta.

AÑOS	DEUDA ANTES DEL PAGO	INTERESES PENDIENTES	PAGO	CANTIDAD AMORTIZADA	DEUDA PENDIENTE
1	20 000	1 200	4 067,25	2 867,25	17 132,75
2	17 132,75	1 027,97	4 067,25	3 039,29	14 093,47
3	14 093,47	845,61	4 067,25	3 221,64	10 871,82
4	10 871,82	652,31	4 067,25	3 414,94	7 456,88
5	7 456,88	447,41	4 067,25	3 619,84	3 837,05
6	3 837,05	230,22	4 067,25	3 837,03	0,02

Hazlo tú. Recibimos un préstamo de 120 000 € al 7,5 % anual. Hemos pagado 25 000 € al final de cada uno de los cuatro primeros años. Si queremos saldar la deuda al final del 5.º año, ¿cuánto hay que pagar?

AÑOS	DEUDA ANTES DEL PAGO	INTERESES PENDIENTES	PAGO	CANTIDAD AMORTIZADA	DEUDA PENDIENTE
1	120 000	9 000	25 000	16 000	104 000
2	104 000	7 800	25 000	17 200	86 800
3	86 800	6 510	25 000	18 490	68 310
4	68 310	5 123,25	25 000	19 876,75	48 433,25
5	48 433,25	3 632,49	x	48 433,25	0,00

El último pago es la suma de la deuda más los intereses pendientes:

$$x = 48\,433{,}25 + 3\,632{,}49 = 52\,065{,}74 \text{ €}$$

1 Comprueba que podemos amortizar 10 000 € al 10 % anual mediante cuatro pagos trimestrales de 2 658,18 € cada uno.

10 % anual = 2,5 % trimestral

PAGO TRIMESTRAL	DEUDA ANTES DEL PAGO	INTERESES PENDIENTES	PAGO	CANTIDAD AMORTIZADA	DEUDA PENDIENTE
1	10 000	250	2 658,18	2 408,18	7 591,82
2	7 591,82	189,80	2 658,18	2 468,38	5 123,44
3	5 123,44	128,09	2 658,18	2 530,09	2 593,35
4	2 593,35	64,83	2 658,18	2 593,35	0,00

2 **Vamos a amortizar un préstamo de 500 000 € al 6 % anual en 8 meses. Los siete primeros pagos son de 60 000 €. ¿A cuánto asciende el último pago?**

Como los pagos son mensuales, debemos tener en cuenta el interés mensual que corresponde al 6 % anual, es deicr, el 0,5 % mensual.

MESES	DEUDA ANTES DEL PAGO	INTERESES PENDIENTES	PAGO	CANTIDAD AMORTIZADA	DEUDA PENDIENTE
1	500 000	2 500,00	60 000	57 500	442 500
2	442 500	2 212,50	60 000	57 787,50	384 712,50
3	384 712,50	1 923,56	60 000	58 076,44	326 636,06
4	326 636,06	1 633,18	60 000	58 366,82	268 269,24
5	268 269,24	1 341,35	60 000	58 658,65	209610,59
6	209610,59	1 048,05	60 000	58 951,95	150 658,64
7	150 658,64	753,29	60 000	59 246,71	91 411,94
8	91 411,94	457,06	x	91 411,94	0,00

El último pago será:

$$x = 91\,411{,}94 + 457{,}06 = 91\,869 \text{ €}$$

6 Progresiones geométricas

Página 62

Hazlo tú. El 1 de enero depositamos 20 000 € al 6 % anual con pago mensual de intereses. ¿Cuál será el valor de nuestro dinero el día 1 de cada mes de ese año si los intereses se van acumulando al capital?

Cada mes el dinero se multiplica por $1 + \frac{6}{1200} = 1,005$.

El 1 de febrero valdrá $20\,000 \cdot 1,005 = 20\,100$.

El 1 de marzo, $20\,000 \cdot 1,005^2 = 20\,200,5$.

El 1 de abril, $20\,000 \cdot 1,005^3 = 20\,301,5$.

El 1 de mayo, $20\,000 \cdot 1,005^4 = 20\,403,01$.

Y así sucesivamente.

Hazlo tú. Durante 6 años, cada año depositamos 3 000 € al 3 % anual con pago anual de intereses. ¿En cuánto se convierte cada depósito al final del 6.º año?

El primer depósito estará 6 años al 3 % anual y se transforma en:

$$a_1 = 3\,000 \cdot 1,03^6 = 3\,582,16$$

Los siguientes:

$$a_2 = 3\,000 \cdot 1,03^5 = 3\,477,82$$

$$a_3 = 3\,000 \cdot 1,03^4 = 3\,376,53$$

$$a_4 = 3\,000 \cdot 1,03^3 = 3\,278,18$$

$$a_5 = 3\,000 \cdot 1,03^2 = 3\,182,7$$

$$a_6 = 3\,000 \cdot 1,03 = 3\,090$$

1 Depositamos 100 000 euros el día 1 de enero en un banco al 8 % anual. ¿Qué valor tienen al final de cada trimestre del año? Estas cantidades están en progresión geométrica. ¿Cuál es la razón?

8 % anual = 2 % trimestral

Al final del primer trimestre valen $100\,000 \cdot 1,02 = 102\,000$ €.

Al final del segundo trimestre valen $100\,000 \cdot 1,02^2 = 104\,040$ €.

Al final del tercer trimestre valen $100\,000 \cdot 1,02^3 = 106\,120,80$ €.

Al final del cuarto trimestre valen $100\,000 \cdot 1,02^4 = 108\,243,22$ €.

La razón es $r = 1,02$.

2 Depositamos una cierta cantidad de dinero al comienzo de un año, en un banco, al 6 % anual. Cada mes esa cantidad aumenta en progresión geométrica. ¿Cuál es la razón de esa progresión?

6 % anual = 0,5 % mensual

La razón es $r = 1,005$.

3 **Al comienzo de cada año depositamos 6 000 euros en un banco al 7 % anual. ¿Cuánto dinero recogeremos al finalizar el 10.º año?**

Por el primer ingreso acumulamos $6\,000 \cdot 1{,}07^{10}$.

Por el segundo ingreso acumulamos $6\,000 \cdot 1{,}07^{9}$.

…

Por el décimo ingreso acumulamos $6\,000 \cdot 1{,}07$.

En total, tendremos $S_{10} = \dfrac{6\,000 \cdot 1{,}07^{11} - 6\,000 \cdot 1{,}07}{1{,}07 - 1} = 88\,701{,}60$ €.

4 **Al comienzo de cada mes depositamos 100 € en un banco al 6 % anual. ¿Cuánto recogeremos al final del 2.º año?**

Por el primer ingreso acumulamos $100 \cdot 1{,}005^{24}$.

Por el segundo ingreso acumulamos $100 \cdot 1{,}005^{23}$.

…

Por el vigesimocuarto ingreso acumulamos $100 \cdot 1{,}005$.

En total, tendremos $S_{24} = \dfrac{100 \cdot 1{,}005^{25} - 100 \cdot 1{,}005}{1{,}005 - 1} = 2\,555{,}91$ €.

Cálculo de anualidades o mensualidades para amortizar deudas

Página 66

Hazlo tú. Si el interés fuera del 8 % y hubiera que pagarlo en 11 anualidades, ¿cuánto sería la cuantía de cada anualidad?

Aplicamos la fórmula para $i = 0{,}08$ y $n = 11$:

$$a = 500\,000 \cdot \frac{1{,}08^{11} \cdot 0{,}08}{1{,}08^{11} - 1} = 70\,038{,}17\ €$$

Hazlo tú. El banco nos concede un préstamo de 25 000 euros al 6 % anual que hay que amortizar en un año en 12 pagos mensuales. ¿Cuál es la mensualidad que hay que pagar?

Tomamos $i = \frac{6}{1200} = 0{,}005$ y $n = 12$ meses:

$$m = 25\,000 \cdot \frac{1{,}005^{12} \cdot 0{,}005}{1{,}005^{12} - 1} = 2\,151{,}66\ €$$

Hazlo tú. Queremos amortizar una deuda de 120 000 €, en 5 años, al 9 % anual, mediante pagos cuatrimestrales. ¿Cuánto debemos pagar cada cuatrimestre?

El interés trimestral es $\frac{9\,\%}{3} = 3\,\%$. Por tanto, $i = \frac{3}{100} = 0{,}03$. En este caso $n = 5 \cdot 3 = 15$:

$$p = 120\,000 \cdot \frac{1{,}03^{15} \cdot 0{,}03}{1{,}03^{15} - 1} = 10\,051{,}99\ €$$

1 **Averigua la mensualidad que hay que pagar para amortizar en 3 años (36 pagos) una deuda de 24 000 euros al 9 % anual.**

$$i = \frac{9}{1200} = 0{,}0075$$

$$m = 24\,000 \cdot \frac{1{,}0075^{36} \cdot 0{,}0075}{1{,}0075^{36} - 1} = 763{,}19\ €$$

2 **¿Cuánto hay que pagar cada trimestre para amortizar en 3 años (12 pagos) una deuda de 24 000 euros al 9 % anual?**

$$i = \frac{9}{400} = 0{,}0225$$

Así, cada trimestre tendremos que pagar: $24\,000 \cdot \frac{1{,}0225^{12} \cdot 0{,}0225}{1{,}0225^{12} - 1} = 2\,304{,}42\ €$

3 **Si compro a plazos una bicicleta de 3 000 € para pagar en 12 meses al 15 % anual, ¿cuánto tendré que pagar al mes?**

Hacemos $i = \frac{15}{1200} = 0{,}0125$ y $n = 12$:

$$m = 3\,000 \cdot \frac{1{,}0125^{12} \cdot 0{,}0125}{1{,}0125^{12} - 1} = 270{,}77\ €$$

4 **Si tengo que pagar 4 092,23 € al año durante los tres siguientes años a un préstamo que me concedió el banco al 11 % de interés anual, ¿qué cantidad me prestó?**

En este caso conocemos la anualidad y debemos calcular el capital. Por tanto:

$$4\,092{,}23 = C \cdot \frac{1{,}11^{3} \cdot 0{,}11}{1{,}11^{3} - 1} \rightarrow C = 4\,092{,}23 \cdot \frac{1{,}11^{3} - 1}{1{,}11^{3} \cdot 0{,}11} = 10\,000\ €$$

5 **Un banco me ha prestado 15 000 € para devolverlos en 2 años. Calcula cuánto habré pagado si devuelvo el préstamo:**

a) Al final de los 2 años.

b) En 2 anualidades.

c) En 8 trimestres.

d) En 24 mensualidades.

Explica por qué pago cantidades diferentes.

Si el banco cobra un $r\%$ de interés anual y tomamos $i = \frac{r}{100}$:

a) Al final de los dos años, en un único pago de $15\,000 \cdot (1+i)^2$.

b) En 2 anualidades, cada una con un valor de:

$$a = 15\,000 \cdot \frac{(1+i)^2 \cdot i}{(1+i)^2 - 1}$$

c) En 8 trimestres, cada pago sería:

$$p = 15\,000 \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{4}\right)^8 \cdot \frac{i}{4}}{\left(1+\frac{i}{4}\right)^8 - 1}$$

porque el interés anual se tendría que repartir en 4 trimestres al año.

d) En 24 mensualidades, cada una con un valor de:

$$m = 15\,000 \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{24} \cdot \frac{i}{12}}{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{24} - 1}$$

Se pagan cantidades diferentes porque con cada pago se amortiza una cantidad de capital. Así, el capital y los intereses pendientes van variando de distinta manera en cada caso.

6 **La mensualidad que tengo que pagar por la compra de una máquina para mi empresa es de 1 521,22 €. Si la financiera me cobra el 12 % anual durante tres años, ¿cuánto costaba la máquina?**

Los datos son $m = 1\,521{,}22$ €, $i = \frac{12}{1200} = 0{,}01$ y $n = 36$ meses (3 años). Por tanto:

$$1\,521{,}22 = C \cdot \frac{1{,}01^{36} \cdot 0{,}01}{1{,}01^{36} - 1} \rightarrow C = 1\,521{,}22 \cdot \frac{1{,}01^{36} - 1}{1{,}01^{36} \cdot 0{,}01} \approx 45\,800 \text{ €}$$

8 Productos financieros

Página 67

1 ¿Verdadero o falso?

a) Si recibimos 120 000 € para adquirir un piso, hemos realizado un fondo de inversión.

b) La diferencia entre bonos y obligaciones solo depende de que la deuda sea a largo o a corto plazo.

c) Los sistemas de ahorro para la jubilación son derechos de propiedad de una empresa denominados acciones.

a) Falso. Lo que hemos hecho es contratar un crédito hipotecario.

b) Verdadero. Ambos son instrumentos de crédito legal que solo se diferencian en el plazo de emisión de deuda.

c) Falso. Estos sistemas son planes de pensiones.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 68

1. Variación del poder adquisitivo de un trabajador

Hazlo tú. Sabiendo que la subida del IPC en 2013 fue de un 0,3 % y que durante 2014 el SMI permaneció congelado, calcula la variación del poder adquisitivo del mismo trabajador entre los años 2010 y 2014.

Subida acumulada del IPC entre comienzos de 2010 y finales de 2013:

$$1{,}03 \cdot 1{,}024 \cdot 1{,}029 \cdot 1{,}003 = 1{,}0886 \ \to \ \text{Subida del } 8{,}86\,\%.$$

Si el salario mínimo hubiese subido proporcionalmente al IPC entre estas fechas, debería ser de:

$$633{,}33 \cdot 1{,}0886 = 689{,}44\ €$$

Como el SMI se mantuvo congelado el año 2014, fue realmente de 645,30 €.

$$I_v = \frac{645{,}30}{689{,}44} = 0{,}936 \ \to \ 1 - 0{,}936 = 0{,}064 \ \to \ \text{Disminución del } 6{,}4\,\%$$

2. Depósito con interés variable

Hazlo tú. Resuelve este mismo ejercicio si las T.A.E. asociadas a cada semestre son 1,0046 %, 2,0184 %, 3,0416 % y 4,0742 %, respectivamente.

Planteamos el problema análogamente al ejercicio resuelto.

$$\text{T.A.E.} = 1{,}0046\,\% \ \to \ r = \left(\sqrt[12]{1 + \frac{1{,}0046}{100}} - 1\right) \cdot 1\,200 = 1 \ \to \ 1\,\%$$

$$\text{T.A.E.} = 2{,}0184\,\% \ \to \ r = \left(\sqrt[12]{1 + \frac{2{,}0184}{100}} - 1\right) \cdot 1\,200 = 2 \ \to \ 2\,\%$$

$$\text{T.A.E.} = 3{,}0416\,\% \ \to \ r = \left(\sqrt[12]{1 + \frac{3{,}0416}{100}} - 1\right) \cdot 1\,200 = 3 \ \to \ 3\,\%$$

$$\text{T.A.E.} = 4{,}0742\,\% \ \to \ r = \left(\sqrt[12]{1 + \frac{4{,}0742}{100}} - 1\right) \cdot 1\,200 = 4 \ \to \ 4\,\%$$

Ahora, con los intereses anuales que corresponden a cada periodo calculamos el valor final del depósito:

$$C_{\text{final}} = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{1200}\right)^6 \cdot \left(1 + \frac{2}{1200}\right)^6 \cdot \left(1 + \frac{3}{1200}\right)^6 \cdot \left(1 + \frac{4}{1200}\right)^6 = 15\,768{,}08\ €$$

El beneficio obtenido es de 15 768,08 – 15 000 = 768,08 €.

Página 69

3. Tabla de amortización de un préstamo

Hazlo tú. Nos conceden un préstamo de 50 000 €, al 5 %, que hemos de devolver en 5 años, pagando cada año una quinta parte del capital pendiente más los intereses de la cantidad adeudada.

Calcula los pagos anuales.

	CAPITAL PENDIENTE	PAGO DE INTERESES	+	PAGO DE CAPITAL	=	PAGO ANUAL	DEUDA PENDIENTE
1.er AÑO	50 000	2 500	+	10 000	=	12 500	40 000
2.° AÑO	40 000	2 000	+	10 000	=	12 000	30 000
3.er AÑO	30 000	1 500	+	10 000	=	11 500	20 000
4.° AÑO	20 000	1 0005	+	10 000	=	11 000	10 000
5.° AÑO	10 000	500	+	10 000	=	10 500	0

Los pagos anuales para amortizar el préstamo serán: 12 500 €, 12 000 €, 11 500 €, 11 000 € y 10 500 €.

4. Comisión de cancelación de un préstamo

Hazlo tú. **Pedimos un préstamo de 100 000 €, al 5 % anual, que tenemos que devolver en 10 años en cuotas anuales. Además, nos imponen una comisión de cancelación anticipada del 2 %.**

¿Cuál sería esta comisión si quisiéramos cancelarlo transcurridos 2 años?

Primero calculamos el valor de cada anualidad:

$$a = 100\,000 \cdot \frac{1,05^{10} \cdot 0,05}{1,05^{10} - 1} = 12\,950,46 \text{ €}$$

Ahora elaboramos la tabla de amortización del préstamo para los primeros 2 años.

	CAPITAL PENDIENTE	CUOTA ANUAL	–	PAGO DE INTERESES	=	PAGO CAPITAL	DEUDA PENDIENTE
1.er AÑO	100 000	12 950,46	–	5 000	=	7 950,46	92 049,54
2.º AÑO	92 049,54	12 950,46	–	4 602,48	=	8 347,98	83 701,56

El valor de la comisión de cancelación es el 2 % de la deuda pendiente, es decir:

$$83\,701,56 \cdot 0,02 = 1\,674,03 \text{ €}$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 70

1. Aumentos acumulados

En el contrato de trabajo de un administrativo se fija una subida anual del 3 %. Si empieza ganando 1 000 € mensuales, ¿cuántos años han de pasar para que su sueldo sea de 1 200 €?

El sueldo del trabajador después de n años es de $1\,000 \cdot 1{,}03^n$ € al mes. Para que el sueldo sea de 1 200 €:

$$1\,200 = 1\,000 \cdot 1{,}03^n \;\rightarrow\; \frac{1200}{1000} = 1{,}03^n \;\rightarrow\; 1{,}2 = 1{,}03^n \;\rightarrow\; n = \frac{\log 1{,}2}{\log 1{,}03} = 6{,}17$$

Deben pasar más de 6 años, es decir, 7 años.

2. Cálculo de la T.A.E.

Colocamos en un depósito bancario a 2 años un capital inicial de 10 000 € al 3 % anual. Halla la T.A.E. asociada y úsala para obtener el capital final si:

a) los periodos de capitalización son mensuales.

b) los periodos de capitalización son cuatrimestrales.

a) El interés mensual es $i_m = \dfrac{3}{1200} = 0{,}0025$.

El índice de variación mensual es $I_{vm} = 1 + 0{,}0025 = 1{,}0025$.

Como esta subida se produce todos los meses, el índice de variación anual es:

$I_v = 1{,}0025^{12} = 1{,}0304156 \;\rightarrow\;$ T.A.E. = 3,0416 %

El capital después de 2 años es $C_{\text{final}} = 10\,000 \cdot 1{,}030416^2 = 10\,617{,}57$ €.

b) El interés cuatrimestral es $i_c = \dfrac{3}{300} = 0{,}01$.

El índice de variación cuatrimestral es $I_{vc} = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$.

Como esta subida se produce todos los cuatrimestres, el índice de variación anual es:

$I_v = 1{,}01^3 = 1{,}030301 \;\rightarrow\;$ T.A.E. = 3,0301 %

El capital después de dos años es $C_{\text{final}} = 10\,000 \cdot 1{,}030301^2 = 10\,615{,}20$ €.

3. Planes de pensiones

Un trabajador contrata un plan de pensiones 35 años antes de su jubilación, con aportaciones anuales de 2 400 € al 4 %.

¿De qué cantidad de dinero dispondrá en el momento de su jubilación?

La primera anualidad se convertirá en $a_1 = 2\,400 \cdot 1{,}04^{35}$.

La segunda, en $a_2 = 2\,400 \cdot 1{,}04^{34}$ al quedar depositada un año menos.

La tercera, en $a_3 = 2\,400 \cdot 1{,}04^{33}$.

…

La última (35.ª), como estará depositada solo un año, se convertirá en $a_{35} = 2\,400 \cdot 1{,}04$.

Se trata de sumar 35 términos de una progresión geométrica de razón $\dfrac{1}{1{,}04}$.

$$S_{35} = \frac{\frac{1}{1{,}04} \cdot 2\,400 \cdot 1{,}04 - 2\,400 \cdot 1{,}04^{35}}{\frac{1}{1{,}04} - 1} = 183\,835{,}95 \text{ €} \quad \text{(dinero del que dispondrá al jubilarse)}$$

4. Interés variable

Una hipoteca está contratada con un interés anual variable de Euribor + 0,65. En el contrato se establece una cláusula suelo que impide que este interés baje del 2,9 %.

Cuando quedan 239 mensualidades por pagar y un capital pendiente de 169 349,20 €, el Euribor tiene un valor de 0,528.

Calcula la cuota actual de la hipoteca y cuál sería esa cuota si se eliminase la cláusula suelo.

Como Euribor + 0,65 = 0,528 + 0,65 = 1,178 no llega a 2,9 al aplicar la cláusula suelo, calculamos la mensualidad de esta forma:

$$\left.\begin{array}{l} i = \dfrac{2,9}{1200} \\ n = 239 \\ C = 169\,349,20 \end{array}\right\} \to m = 169\,349,20 \cdot \frac{\left(1+\dfrac{2,9}{1200}\right)^{239} \cdot \dfrac{2,9}{1200}}{\left(1+\dfrac{2,9}{1200}\right)^{239} - 1} = 933,63 \text{ €}$$

Si se eliminase la cláusula suelo, la mensualidad sería:

$$m = 169\,349,20 \cdot \frac{\left(1+\dfrac{1,178}{1200}\right)^{239} \cdot \dfrac{1,178}{1200}}{\left(1+\dfrac{1,178}{1200}\right)^{239} - 1} = 795,29 \text{ €}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 71

Para practicar

Porcentajes

1 **Tras subir el IVA cultural del 8 % al 21 %, el precio de las entradas en dos cines ha pasado de 8 a 9 euros, y de 6,70 a 7,50 euros, respectivamente. ¿Cuál ha sido el porcentaje de subida de las entradas en cada cine? ¿Se corresponde con la subida del IVA?**

- En el primer caso, el precio ha subido de 8 € (IVA 8 % incluido) a 9 € (IVA 21 % incluido).

  El porcentaje de subida lo obtenemos calculando $\frac{9}{8} = 1,125 \rightarrow 12,5\,\%$.

  El IVA del 8 % se corresponde con el índice de variación $1 + \frac{8}{100} = 1,08$.

  Por tanto, el precio de la entrada sin el 8 % de IVA es $\frac{8}{1,08} = 7,41$ €.

  Ahora, aplicamos el 21 % de IVA y obtenemos el precio final: $7,41 \cdot 1,21 = 8,97$ €, que se corresponde con los 9 €.

- Razonamos análogamente en el segundo caso.

  El porcentaje de subida lo obtenemos calculando $\frac{7,50}{6,70} = 1,1194 \rightarrow 11,94\,\%$.

  El precio de la entrada sin el 8 % de IVA es $\frac{7,50}{1,08} = 6,94$ €.

  Ahora, aplicamos el 21 % de IVA y obtenemos el precio final: $6,94 \cdot 1,21 = 8,40$ €.

  El precio cobrado, (7,50 €), es más bajo que el que debería ser aplicando la subida del IVA cultural.

2 **Si el precio de un artículo ha pasado de 35 € a 100 € en unos años, ¿cuál es el índice de variación? ¿Cuál ha sido el aumento expresado en porcentajes?**

Índice de variación $= \frac{100}{35} = 2,8571$. Ha aumentado un 185,71 %.

3 **El número total de hipotecas en España en 2009 ascendió a 1 082 587. En 2012 hubo 458 937 hipotecas. Calcula el índice de variación y el porcentaje de bajada.**

El índice de variación es $I_v = \frac{458\,937}{1\,082\,587} = 0,4239$.

Para hallar el porcentaje de bajada, calculamos:

$1 - 0,4239 = 0,5761 \rightarrow 57,61\,\%$ de bajada

4 **En 2008 había 7 033 filiales de empresas extranjeras en España. En 2009 el número ascendió a 8 064. ¿Cuál es el índice de variación? ¿Qué porcentaje supone esta subida?**

El índice de variación es $I_v = \frac{8\,064}{7\,033} = 1,1466$.

Para hallar el porcentaje de subida, calculamos:

$1,1466 - 1 = 0,1466 \rightarrow 14,66\,\%$ de subida

5 **Averigua el índice de variación del precio de un televisor que costaba 450 €, después de subirlo un 15 % y rebajarlo posteriormente un 25%. ¿Cuál es el precio actual?**

Índice de variación = $1{,}15 \cdot 0{,}75 = 0{,}8625$

Precio actual = $450 \cdot 0{,}8625 = 388{,}13$ €

6 **La cantidad de agua de un embalse ha disminuido en un 35 % respecto a lo que había el mes pasado. Ahora contiene 74,25 millones de litros.**

¿Cuántos litros tenía el mes pasado?

$0{,}65x = 74{,}25 \rightarrow x = 114{,}23$ millones de litros

7 **En la tabla siguiente se muestra, en millones de euros, la recaudación en España de la AEAT en tres años distintos:**

	2003	2005	2008
TOTAL	28 892	47 721	51 577
ENERGÍA/AGUA	1 150	4 838	3 834
COMERCIO	9 853	18 633	21 245

a) Calcula el porcentaje de la recaudación total que supone la procedente del comercio en esos años.

b) Averigua el índice de variación de la recaudación procedente de energía y agua entre los años 2003 y 2005, 2005 y 2008 y entre 2003 y 2008. Exprésalo también usando porcentajes.

a) Año 2003 $\rightarrow \dfrac{9853}{28892} = 0{,}3410 \rightarrow 34{,}10\,\%$ de la recaudación total

Año 2004 $\rightarrow \dfrac{18633}{47721} = 0{,}3905 \rightarrow 39{,}05\,\%$

Año 2005 $\rightarrow \dfrac{21245}{51577} = 0{,}4119 \rightarrow 41{,}19\,\%$

b) Entre los años 2003 y 2005:

$I_v = \dfrac{4838}{1150} = 4{,}207 \rightarrow 4{,}207 - 1 = 3{,}207 \rightarrow$ Subida del 320,7 %.

Entre los años 2005 y 2008:

$I_v = \dfrac{3834}{4838} = 0{,}7924 \rightarrow 1 - 0{,}7924 = 0{,}2076 \rightarrow$ Bajada del 20,76 %.

Entre los años 2003 y 2008:

$I_v = \dfrac{3834}{1150} = 3{,}3339 \rightarrow 3{,}3339 - 1 = 2{,}3339 \rightarrow$ Subida del 233,39 %.

8 **Entre los años 2004 y 2012 el número de matrimonios en España disminuyó un 21,89 %. Si en 2012 hubo 168 835 matrimonios, ¿cuántos hubo en 2004?**

El índice de variación que corresponde a la bajada es $I_v = 1 - 0{,}2189 = 0{,}7811$.

El número de matrimonios que hubo en el año 2004 fue: $\dfrac{168835}{0{,}7811} \approx 216\,150$.

9 **En un centro escolar, por cada 5 alumnos que aprueban todas las asignaturas, hay 4 que suspenden alguna. ¿Qué fracción y qué porcentaje del total supone cada uno de los dos tipos?**

Los alumnos que aprueban todas las asignaturas son los $\dfrac{5}{9}$ del total, que se corresponde con el 55,56 %.

Los alumnos que suspenden alguna asignatura son los $\dfrac{4}{9}$ del total, que se corresponde con el 44,44 %.

10 **En marzo de 2014 el IPC se calculaba con base al año 2011. En la siguiente tabla se muestran los 12 grupos que formaban la cesta de la compra y sus respectivas ponderaciones en el cálculo del IPC con base al año 2011:**

GRUPO	SECTORES	PONDERACIONES (%)	ÍNDICE MARZO 2014	% VARIACIÓN MENSUAL
1	Alimentación y bebidas no alcohólicas	18,95	104,7	−0,7
2	Bebidas alcohólicas y tabaco	2,81	113,9	0,1
3	Vestido y calzado	7,61	95,2	4,2
4	Vivienda	12,46	107,6	0,0
5	Menaje	6,36	101,4	0,2
6	Medicina	3,26	110,9	0,2
7	Transporte	15,33	104,4	0,0
8	Comunicaciones	3,74	88,7	0,0
9	Ocio y cultura	7,27	99,8	0,3
10	Enseñanza	1,54	114,9	0,0
11	Hoteles, cafés y restaurantes	11,22	101,1	0,3
12	Otros	9,45	105,3	0,0
GENERAL		100		

a) ¿Cuáles son los sectores con un mayor y un menor peso en el cálculo del IPC? ¿Qué porcentaje representan?

b) ¿Cuánto ha aumentado el gasto en transporte desde 2011 hasta marzo de 2014?

c) El índice asociado a la vivienda en este mes de marzo de 2014 era 107,6 y el de la enseñanza era de 114,9. ¿Qué significado tienen estas cantidades?

d) Teniendo en cuenta las ponderaciones de cada grupo, calcula el índice general del IPC de este mes y la variación porcentual mensual.

a) Los sectores con mayor peso en el IPC son:

1. Alimentación y bebidas no alcohólicas.
2. Transporte.
3. Vivienda.
4. Hoteles, cafés y restaurantes.

Suponen el $18{,}95 + 15{,}33 + 12{,}46 + 11{,}22 = 57{,}96\,\%$ del IPC.

Los sectores con menos peso son:

1. Enseñanza.
2. Bebidas alcohólicas y tabaco.
3. Medicina.
4. Comunicaciones.

Suponen el $1{,}54 + 2{,}81 + 3{,}26 + 3{,}74 = 11{,}35\,\%$ del IPC.

b) El gasto en transporte ha aumentado el 4,4 %.

c) El primer índice indica que el gasto en vivienda ha aumentado un 7,6 % desde el año 2011 hasta marzo de 2014.

El segundo refleja un aumento del gasto en la enseñanza del 14,9 % entre las mismas fechas.

d) El índice general es la suma ponderada de los índices por sectores, es decir:

$$\frac{18,95 \cdot 104,7 + 2,81 \cdot 113,9 + 7,61 \cdot 95,2 + 12,46 \cdot 107,6 + 6,36 \cdot 101,4 + 3,26 \cdot 110,9 + 15,33 \cdot 104,4}{100} +$$

$$+ \frac{3,74 \cdot 88,7 + 7,27 \cdot 99,8 + 1,54 \cdot 114,9 + 11,22 \cdot 101,1 + 9,45 \cdot 105,3}{100} = 103,4$$

Análogamente, la variación mensual será:

$$\frac{18,95 \cdot (-0,7) + 2,81 \cdot 0,1 + 7,61 \cdot 4,2 + 12,46 \cdot 0,0 + 6,36 \cdot 0,2 + 3,26 \cdot 0,2 + 15,33 \cdot 0,0 + 3,74 \cdot 0,0}{100} +$$

$$+ \frac{7,27 \cdot 0,3 + 1,54 \cdot 0,0 + 11,22 \cdot 0,3 + 9,45 \cdot 0,0}{100} = 0,26$$

Intereses bancarios. T.A.E.

11 En 2008 un banco ofrecía a sus clientes un depósito a 1 año a un interés anual del 5 % con pago mensual de intereses. En 2013, el mismo depósito era ofrecido a un interés del 2 % anual. Si el producto se hubiese contratado con 50 000 €, ¿cuáles habrían sido los beneficios en cada uno de los años?

- Año 2008

Un interés del 5 % anual se corresponde con un $\frac{5\%}{12}$ de interés mensual. Como los pagos de intereses son mensuales, el capital final es:

$$C_{final} = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{1\,200}\right)^{12} = 52\,558,09 \text{ €}$$

Los beneficios son:

52 558,09 – 50 000 = 2 558,09 €

- Año 2013

$C_{final} = 50\,000 \cdot 1,02 = 51\,000$ €

Los beneficios son:

51 000 – 50 000 = 1 000 €

12 ¿En cuánto se transforma un capital de 3 500 € depositados durante tres meses al 8,5 % anual? ¿Y si se mantiene 5 años con periodos de capitalización trimestrales?

En tres meses:

$$8,5\,\% \text{ anual} \rightarrow \frac{8,5}{4} = 2,125 \text{ trimestral}$$

3 500 · 1,02125 = 3 574,38 €

En cinco años (20 trimestres):

$3\,500 \cdot 1,02125^{20} = 5\,329,78$ €

13 **Un banco nos ofrece dos tipos de depósitos a 10 años. El depósito A, con un rédito del 3 % y pago mensual de intereses, y el depósito B, cuyo rédito es del 3,5 % y tiene pago anual de intereses. ¿Qué opción es más ventajosa? ¿Qué beneficio obtendremos en cada depósito si colocamos 15 000 euros?**

- Para elegir la opción más ventajosa podemos calcular la T.A.E. del depósito A y compararla con la del B (cuyo valor es 3,5 % al ser el pago de intereses anual).

  $i = \frac{3}{100} \to i_m = \frac{3}{1200} = 0{,}0025 \to I_{vm} = 1{,}0025$

  T.A.E. $= 1{,}0025^{12} - 1 = 0{,}030416 \to 3{,}0416\,\%$

  Por tanto, el depósito B es más ventajoso que el depósito A.

- Calculamos los beneficios:

  Depósito A

  El capital al cabo de 10 años (120 meses) es:

  $C_{\text{final}} = 15\,000 \cdot 1{,}0025^{120} = 20\,240{,}30 \to$ Beneficio $= 20\,240{,}30 - 15\,000 = 5\,240{,}30$ €

  Depósito B

  El capital al cabo de 10 años es:

  $C_{\text{final}} = 15\,000 \cdot 1{,}035^{10} = 21\,158{,}98 \to$ Beneficio $= 21\,158{,}98 - 15\,000 = 6\,158{,}98$ €

14 **Un capital colocado al 2,5 % anual durante cuatro años se ha convertido en 11 038,13 €. ¿A cuánto ascendía ese capital?**

Si C representa el capital inicial, entonces:

$$11\,038{,}13 = C \cdot \left(1 + \frac{2{,}5}{100}\right)^4 \to 11\,038{,}13 = C \cdot 1{,}025^4 \to C = \frac{11038{,}13}{1{,}025^4} = 10\,000 \text{ €}$$

15 **¿Cuántos años tiene que estar depositado un capital de 15 000 €, al 4,7 % anual, para convertirse en 18 000 €?**

$$18\,000 = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{4{,}7}{100}\right)^n \to n \approx 4$$

Debe permanecer 4 años.

16 **Calcula el tanto por ciento anual al que se han de colocar 600 € para que en dos años se conviertan en 699,84 €.**

$$600 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 = 699{,}84 \to r = 8\,\%$$

17 **Depositamos 32 500 € en un banco durante un año y medio y se convierten en 32 720 €. ¿Qué tanto por ciento mensual nos da el banco?**

$$32\,720 = 32\,500 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{18} \to r = 0{,}037\,\% \text{ mensual}$$

18 **Calcula la T.A.E. para un rédito anual del 10 % con pagos mensuales de intereses.**

$10\,\%$ anual $= \frac{10}{12}\,\%$ mensual

Un capital C se transforma en un año en $C \cdot \left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{12}$.

Es decir, $C \cdot 1{,}1047$.

Por tanto, la T.A.E. será del 10,47 %.

19 **Colocamos en un depósito a 3 años 10 000 € al 4,5 % anual, siendo los periodos de capitalización mensuales. Calcula la T.A.E. asociada. ¿En cuánto se transforma el capital inicial?**

$i = \dfrac{4,5}{100} \rightarrow i_m = \dfrac{4,5}{1200} = 0,00375 \rightarrow I_{vm} = 1,00375$

T.A.E. $= 1,00375^{12} - 1 = 0,04594 \rightarrow 4,594\,\%$

El capital inicial se transforma en 3 años (36 meses) en:

$C_{\text{final}} = 10\,000 \cdot 1,00375^{36} = 11\,442,48$ €

20 **Calcula en cuánto se transforman 5 000 euros en un año al 10 % si los periodos de capitalización son: a) semestres; b) trimestres; c) meses. Di, en cada caso, cuál es la T.A.E. correspondiente.**

* ***a) 10% anual → 5 % durante 2 semestres → T.A.E.: (1 + 5/100)² → 10,25 %.***

a) 10 % anual = 5 % semestral

$5\,000 \cdot 1,05^2 = 5\,000 \cdot 1,1025 = 5\,512,50$ € → T.A.E. del 10,25 %

b) 10 % anual = 2,5 % trimestral

$5\,000 \cdot 1,025^4 = 5\,000 \cdot 1,1038 = 5\,519,06$ € → T.A.E. del 10,38 %

c) 10 % anual $= \dfrac{10}{12}$ % mensual $= \dfrac{5}{6}$ % mensual

$5\,000 \cdot \left(1 + \dfrac{5}{600}\right)^{12} = 5\,000 \cdot (1,008\widehat{3})^{12} = 5\,000 \cdot 1,1047 = 5\,523,57$ € → T.A.E. del 10,47 %

Amortización de préstamos

21 **Un comerciante pide un préstamo de 5 000 euros para devolver en un solo pago a los tres meses. ¿A cuánto debe ascender ese pago si el precio del dinero está al 12 % anual?**

12 % anual es un 3 % trimestral. El pago será de:

$5\,000 \cdot 1,03 = 5\,150$ €

22 **Recibimos un préstamo de 8 500 € al 15 % anual, que hemos de devolver en un solo pago. ¿Cuántos años han transcurrido si al liquidarlo pagamos 14 866,55 €?**

$8\,500 \cdot (1,15)^t = 14\,866,55 \rightarrow t = 4$ años

23 **Calcula la cuota mensual de un préstamo de 6 000 € con un rédito del 8 % que hemos de devolver en 1 año. Si el tiempo para la devolución fuese de 2 años, ¿cuál sería la nueva cuota?**

Como devolvemos el préstamo en un año, tenemos que pagar 12 mensualidades. Por tanto:

$$m = 6\,000 \cdot \frac{\left(1 + \dfrac{8}{1200}\right)^{12} \cdot \dfrac{8}{1200}}{\left(1 + \dfrac{8}{1200}\right)^{12} - 1} = 521,93 \text{ €}$$

Si lo devolviéramos en 2 años, pagaríamos 24 mensualidades, luego:

$$m = 6\,000 \cdot \frac{\left(1 + \dfrac{8}{1200}\right)^{24} \cdot \dfrac{8}{1200}}{\left(1 + \dfrac{8}{1200}\right)^{24} - 1} = 271,36 \text{ €}$$

24 **Hemos de amortizar 50 000 € en 5 años, con un interés del 15 %, de modo que cada año se paguen los intereses del capital pendiente más la quinta parte del capital total. Calcula lo que hay que pagar cada año.**

	CAPITAL PENDIENTE	PAGO DE INTERESES	+	PAGO DE CAPITAL	=	PAGO ANUAL	DEUDA PENDIENTE
1.er AÑO	50 000	50 000 · 0,15	+	10 000	=	17 500	40 000
2.º AÑO	40 000	40 000 · 0,15	+	10 000	=	16 000	30 000
3.er AÑO	30 000	30 000 · 0,15	+	10 000	=	14 500	20 000
4.º AÑO	20 000	20 000 · 0,15	+	10 000	=	13 000	10 000
5.º AÑO	10 000	10 000 · 0,15	+	10 000	=	11 500	0

25 **Una entidad bancaria nos concede un préstamo de 20 000 € que amortizaremos en 5 años con un interés anual del 9 %. Calcula las cuotas del préstamo si:**

a) los pagos son mensuales.

b) los pagos son trimestrales.

c) los pagos son anuales.

a) $i = 9\,\%$ anual $\rightarrow i_m = \dfrac{9}{1200} = 0{,}0075 \rightarrow I_{vm} = 1{,}0075$

5 años $\rightarrow$ 60 meses

$$m = 20\,000 \cdot \frac{1{,}0075^{60} \cdot 0{,}0075}{1{,}0075^{60} - 1} = 415{,}17 \text{ €}$$

b) $i = 9\,\%$ anual $\rightarrow i_t = \dfrac{9}{400} = 0{,}0225 \rightarrow I_{vt} = 1{,}0225$

5 años $\rightarrow$ 20 trimestres

$$p = 20\,000 \cdot \frac{1{,}0225^{20} \cdot 0{,}0225}{1{,}0225^{20} - 1} = 1\,252{,}84 \text{ €}$$

c) $a = 20\,000 \cdot \dfrac{1{,}09^{5} \cdot 0{,}09}{1{,}09^{5} - 1} = 5\,141{,}85 \text{ €}$

26 **Una persona paga un coche en sesenta mensualidades de 333,67 €. Si el precio del dinero está al 12 % anual, ¿cuál sería el precio del coche si se pagara al contado?**

* *Conocemos m y hay que calcular C. Sustituye los datos en la fórmula y despeja C.*

$$C = \frac{1{,}01^{60} - 1}{1{,}01^{60} \cdot 0{,}01} \cdot 333{,}67 \approx 15\,000 \text{ €}$$

27 **Compramos un electrodoméstico de 750 € y lo pagamos en 24 plazos mensuales con un interés del 13 %. ¿Cuál será la cuota mensual?**

$$m = 750 \cdot \frac{\left(1 + \dfrac{13}{1200}\right)^{24} \cdot \dfrac{13}{1200}}{\left(1 + \dfrac{13}{1200}\right)^{24} - 1} = 35{,}66 \text{ €}$$

28 **Un banco nos concede un préstamo al 6 %, que hemos de amortizar en 7 anualidades de 14 330,80 € cada una. ¿Cuánto dinero nos prestó?**

$$a = C \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \rightarrow C = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

$$C = 14\,330{,}80 \cdot \frac{1{,}06^{7} - 1}{1{,}06^{7} \cdot 0{,}06} = 80\,000 \text{ €}$$

29 **En un examen de francés han aprobado el 60 % de los estudiantes. En la recuperación de los suspendidos, aprueban el 30 %, que suman 18. ¿Cuál es el porcentaje total de aprobados? ¿Cuántos estudiantes cursan francés?**

* ***Ten en cuenta que solo el 40 % se presenta a la recuperación. Suma los porcentajes de los que aprueban.***

Como suspende el 40 % de los estudiantes, recuperan el $\frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{12}{100} = 12\,\%$ del total.

El porcentaje final de aprobados es 60 % + 12 % = 72 % del total.

Estudian francés $\frac{18}{0,12} = 150$ estudiantes.

30 **Si el precio del alquiler de un apartamento sube un 10 % cada año, ¿cuántos años tardaría en duplicarse?**

El índice de variación anual es $1 + \frac{10}{100} = 1,1$. Si llamamos n al número de años que tarda en duplicarse, se tiene que:

$$2 = 1,1^n \rightarrow \log 2 = n \log 1,1 \rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1,1} = 7,27$$

Por tanto, tienen que pasar 8 años para que se duplique.

31 **La siguiente tabla recoge la evolución del salario mínimo interprofesional (SMI) y el IPC anual en España desde el inicio de 2006 hasta el inicio de 2011.**

	SMI (€/MES)	IPC (%)
2006	540,90	2,7
2007	570,60	4,2
2008	600,00	1,4
2009	624,00	0,8
2010	633,30	3,0
2011	641,40	

a) Calcula el porcentaje de subida anual y el acumulado, en este periodo de tiempo, del SMI.

b) Calcula el porcentaje de subida acumulado del IPC en los 5 años.

c) Un trabajador que cobre el SMI, ¿ha perdido o ha ganado poder adquisitivo en este periodo de tiempo?

* ***Fíjate en el problema resuelto 1.***

a) Para calcular el porcentaje de subida, por ejemplo, entre el año 2006 y el 2007, procedemos así:

$$I_v = \frac{570,60}{540,90} = 1,0549 \rightarrow \text{Subida del } 5,49\,\%.$$

De esta manera, se obtiene la siguiente tabla:

	SMI (€/MES)	SUBIDA (%)
2006	540,90	5,49
2007	570,60	5,15
2008	600,00	4,00
2009	624,00	1,49
2010	633,30	1,28
2011	641,40	

El porcentaje acumulado lo obtenemos a partir de los índices de variación:

$1,0549 \cdot 1,0515 \cdot 1,04 \cdot 1,0149 \cdot 1,0128 = 1,1858 \rightarrow$ 18,58 % acumulado entre inicio de 2006 e inicio de 2011.

b) El porcentaje de subida acumulado del IPC lo obtenemos de la misma forma:

$1{,}027 \cdot 1{,}042 \cdot 1{,}014 \cdot 1{,}008 \cdot 1{,}03 = 1{,}1266 \rightarrow 12{,}66\,\%$ acumulado en el mismo periodo.

c) Ha ganado poder adquisitivo a la vista de los porcentajes anteriores. Si la subida hubiese sido proporcional al IPC en ese periodo, el SMI sería de $540{,}90 \cdot 1{,}1266 = 609{,}38$ € que es una cantidad inferior al SMI del año 2011.

Página 73

32 Calcula la T.A.E. asociada a un rédito anual del 6 % con periodos de capitalización mensuales. ¿Cuál sería la T.A.E. si el pago de intereses fuese trimestral?

Si los periodos de capitalización son mensuales:

$$i = 6\,\%\text{ anual} \rightarrow i_m = \frac{6}{1200} = 0{,}005 \rightarrow I_{vm} = 1{,}005$$

$$\text{T.A.E.} = 1{,}005^{12} - 1 = 0{,}06168 \rightarrow 6{,}168\,\%$$

Si son trimestrales:

$$i = 6\,\%\text{ anual} \rightarrow i_t = \frac{6}{400} = 0{,}015 \rightarrow I_{vt} = 1{,}015$$

$$\text{T.A.E.} = 1{,}015^{4} - 1 = 0{,}06136 \rightarrow 6{,}136\,\%$$

33 Un depósito nos ofrece un 5 % T.A.E. Si los periodos de capitalización son mensuales, ¿cuál es el rédito asociado?

* ***Si r es el rédito, $\left(1+\frac{r}{1\,200}\right)^{12} = 1{,}05$.***

Supongamos que el rédito es del $r\,\%$ y los periodos de capitalización son mensuales.

$$i = r\,\%\text{ anual} \rightarrow I_m = \frac{r}{1200}$$

$$5\,\%\text{ T.A.E.} \rightarrow I_v = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$$

Por tanto:

$$1{,}05 = \left(1+\frac{r}{1200}\right)^{12} \rightarrow \sqrt[12]{1{,}05} = 1 + \frac{r}{1200} \rightarrow r = \left(\sqrt[12]{1{,}05} - 1\right)\cdot 1200 = 4{,}89 \text{ es el rédito asociado.}$$

34 Un banco paga el 2 % trimestral. ¿Cuántos años tienen que estar depositados 2 000 euros para convertirse en 2 536,48 €?

Llamamos n al número de años que tienen que estar depositados. Entonces, el número de trimestres es $4n$. Por tanto:

$$2\,536{,}48 = 2\,000 \cdot \left(1+\frac{2}{100}\right)^{4n} \rightarrow \frac{2\,536{,}48}{2\,000} = 1{,}02^{4n} \rightarrow 1{,}26824 = 1{,}02^{4n} \rightarrow$$

$$\rightarrow \log 1{,}26824 = 4n \log 1{,}02 \rightarrow n = \frac{\log 1{,}26824}{4 \log 1{,}02} = 3 \text{ años}$$

35 Una familia paga una cuota mensual de 644,30 € por la hipoteca de su vivienda. Si el préstamo fue a 25 años con un rédito del 6 %, ¿cuál fue el capital inicial solicitado?

Los datos del problema son:

$$m = 644{,}30;\; n = 25 \cdot 12 = 300 \text{ mensualidades};\; I = \frac{6}{100} \rightarrow I_m = \frac{6}{1200} = 0{,}005 \rightarrow I_{vm} = 1{,}005$$

Sustituyendo en la fórmula de las anualidades de amortización, obtenemos:

$$644{,}30 = C \cdot \frac{1{,}005^{300} \cdot 0{,}005}{1{,}005^{300} - 1} \rightarrow C = 644{,}30 \cdot \frac{1{,}005^{300} - 1}{1{,}005^{300} \cdot 0{,}005} = 100\,000 \text{ €}$$

36 **Quiero pedir una hipoteca para comprar una vivienda. Mi nómina es de 1 500 € y mi entidad bancaria no quiere que mi nivel de endeudamiento sea superior a un tercio de la misma. Si me conceden una hipoteca a 30 años con un rédito del 4,5 %, ¿cuál es la cantidad máxima que puedo pedir al banco?**

Debemos calcular la cantidad teniendo en cuenta que el banco nos permite una mensualidad máxima de $\frac{1500}{3} = 500$ €.

$$I = \frac{4,5}{100} \rightarrow I_m = \frac{4,5}{1200} = 0,00375 \rightarrow I_{vm} = 1,00375$$

30 años $\rightarrow$ 30 · 12 = 360 mensualidades

La relación entre la mensualidad y el capital es:

$$500 = C \cdot \frac{1,00375^{360} \cdot 0,00375}{1,00375^{360} - 1} \rightarrow C = 500 \cdot \frac{1,00375^{360} - 1}{1,00375^{360} \cdot 0,00375} = 98\,680,58 \text{ €}$$

Por tanto, el banco nos permitiría pedir un máximo de 98 680,58 €.

37 **El banco nos concede un préstamo personal de 15 000 € al 12 % anual para devolver en 24 mensualidades. Si nos fija una comisión de cancelación anticipada del 1 %, ¿a cuánto ascendería esta comisión si queremos cancelar el préstamo al cabo de 6 meses?**

Para resolver el problema construimos la tabla de amortizaciones del préstamo. Así podremos saber cuál es el capital pendiente sobre el que se aplica la comisión del 1 %.

Primero calculamos la mensualidad:

$$i = \frac{12}{100} \rightarrow i_m = \frac{12}{1200} = 0,01 \rightarrow I_{vm} = 1,01$$

$$m = 15\,000 \cdot \frac{1,01^{24} \cdot 0,01}{1,01^{24} - 1} = 706,10 \text{ €}$$

Ahora calculamos la tabla de amortizaciones:

MESES	DEUDA ANTES DEL PAGO	INTERESES PENDIENTES	PAGO	CANTIDAD AMORTIZADA	DEUDA PENDIENTE
1	15 000,00	150,00	706,10	556,10	14 443,90
2	14 443,90	144,44	706,10	561,70	13 882,24
3	13 882,24	138,82	706,10	567,28	13 314,96
4	13 314,96	133,15	706,10	572,95	12 742,01
5	12 742,01	127,42	706,10	578,68	12 163,33
6	12 163,33	121,63	706,10	584,47	11 578,86

La comisión de cancelación será: $\frac{1}{100} \cdot 11\,578,86 = 115,79$ €.

38 **Ingreso en un banco 3 500 € al principio de cada año al 8 % durante 5 años. ¿Cuánto dinero tendré al final del quinto año?**

El primer año el dinero se convertirá en $a_1 = 3\,500 \cdot 1,08^5$ €.

El segundo año, en $a_2 = 3\,500 \cdot 1,08^4$ € ya que el dinero estará un año menos en el banco.

…

El quinto, en $a_5 = 3\,500 \cdot 1,08$ € al estar solo un año en el banco.

Se trata de calcular la suma de los elementos de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{1,08}$. Por tanto:

$$S_5 = \frac{r \cdot a_5 - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{1}{1,08} \cdot 3500 \cdot 1,08 - 3500 \cdot 1,08^5}{\frac{1}{1,08} - 1} = 22\,175,75 \text{ €}$$ tendremos al final del 5.º año.

39 **Un ahorrador mete todos los años en la misma fecha 1 500 € en una cuenta que le produce el 6 % anual. ¿Qué cantidad habrá acumulado al cabo de 3 años?**

Al final acumulará el dinero invertido más los intereses que genera. En este caso:

– El primer año el dinero se convertirá en $a_1 = 3\,500 \cdot 1{,}06^3 = 4\,168{,}56$ €.

– El segundo, en $a_2 = 3\,500 \cdot 1{,}06^2 = 3\,932{,}60$ €, ya que el dinero estará un año menos en el banco.

– El tercero, en $a_3 = 3\,500 \cdot 1{,}06 = 3\,710$ €.

Al finalizar el tercer año habrá acumulado 4 168,56 + 3 932,60 + 3 710 = 11 811,16 €.

40 **He recibido un préstamo de una financiera por el que tengo que pagar 10 anualidades de 1 413,19 €. ¿Cuál es la cantidad prestada si el rédito es el 10,5 %?**

$$C = 1\,413{,}19 \cdot \frac{1{,}105^{10} - 1}{1{,}105^{10} \cdot 0{,}105} = 8\,500 \text{ €}$$

41 **Comprueba que si ingresamos al final de cada año una anualidad de 2 500 € durante 8 años, al 5 %, acumularemos en total 23 872,77 €.**

1.ª anualidad: 2 500 en 7 años $\rightarrow$ $2\,500 \cdot 1{,}05^7$

2.ª anualidad: 2 500 en 6 años $\rightarrow$ $2\,500 \cdot 1{,}05^6$

…

7.ª anualidad: 2 500 en 1 año $\rightarrow$ $2\,500 \cdot 1{,}05$

8.ª anualidad: 2 500 $\rightarrow$ 2 500

En total:

$$S = 2\,500\,[1 + 1{,}05 + \ldots + 1{,}05^6 + 1{,}05^7] = 2\,500 \cdot \frac{1{,}05^8 - 1}{1{,}05 - 1} = 23\,872{,}77 \text{ €}$$

42 **Un trabajador ahorra 5 000 € anuales que ingresa en el banco al principio de cada año. Si el banco le da un 9,5 % de interés, ¿qué cantidad tendrá al cabo de 10 años?**

$$5\,000 \cdot 1{,}095 \cdot \frac{1{,}095^{10} - 1}{0{,}095} = 85\,192{,}59 \text{ €}$$

Para profundizar

43 **Una persona inicia un plan de pensiones a los 45 años, con cuotas mensuales de 200 € al 9 % anual, con periodos de capitalización mensuales. ¿De qué capital dispondrá a los 65 años?**

9 % anual = 0,75 % mensual

20 años = 240 mensualidades

$$C = 200 \cdot 1{,}0075 \cdot \frac{1{,}0075^{240} - 1}{0{,}0075} = 134\,579{,}20 \text{ €}$$

44 **Recibimos un préstamo de 10 000 € al 12 % anual que hemos de pagar en un año con plazos mensuales. El banco nos cobra 350 € por la gestión del préstamo en el momento de su concesión. Comprueba que la T.A.E. correspondiente a ese préstamo es de un 16,77 %.**

* ***El banco nos cobra 10 000 € al 1 % mensual, pero lo que realmente recibimos es 9 650 €, que al r % anual (r = T.A.E.) será igual a lo que el banco nos cobra. Plantea la ecuación correspondiente y despeja r.***

12 % anual = 1 % mensual

En realidad, recibimos 9 650 €.

Devolvemos $10\,000 \cdot 1{,}01^{12} = 11\,268{,}25$ €.

$$\frac{11268{,}25}{9650} = 1{,}1677 \rightarrow \text{La T.A.E. será del } 16{,}77\,\%.$$

Autoevaluación

1 **En un control de calidad realizado en una fábrica de bombillas LED, el 5 % no superó las 12 000 horas de vida. De las restantes, un 2 % no pasó de las 15 000 horas. Si 13 965 bombillas pasaron el control, ¿qué porcentaje de bombillas no superó la prueba? ¿Cuántas bombillas fueron testadas?**

El porcentaje de bombillas que no superó las 15 000 h de vida es el $\frac{2}{10} \cdot \frac{95}{100} = \frac{19}{1000}$ = 1,9 % del total.

Por tanto, el porcentaje de bombillas que no superó la prueba es el 5 % + 1,9 % = 6,9 % del total.

El porcentaje de bombillas que pasó la prueba es el 100 % – 6,9 % = 93,1 % del total, que representa a las 13 965 bombillas que sí superaron la prueba.

Luego el número de bombillas testadas es: $\frac{13965}{0,931}$ = 15 000 bombillas.

2 **El sueldo de un trabajador aumentó, a principios de año, de 1 450 € a 1 508 €. ¿Cuál fue el índice de variación? ¿Y el porcentaje de subida?**

El índice de variación es: $I_v = \frac{1508}{1450} = 1,04$

El porcentaje de subida es: 1,04 – 1 = 0,04 = 4 %

3 **Unos pantalones que cuestan 50 € sufren un descuento de 10 € en las rebajas. Posteriormente, vuelven a ser rebajados un 40 %. Calcula su precio final y su índice de variación.**

Índice de variación de la primera rebaja: $I_1 = \frac{40}{50} = 0,80$

Índice de variación de la segunda rebaja: $I_2 = 1 - 0,40 = 0,60$

Índice de variación total: $I = I_1 \cdot I_2 = 0,80 \cdot 0,60 = 0,48$

Precio final: 50 · 0,48 = 24 €

4 **Ponemos 60 000 € en un banco al 3 % anual. ¿Cuántos años debemos dejar ese dinero en el banco para obtener 33 478,04 € de beneficio?**

Cuando pasen n años, hemos de tener 60 000 + 33 478,04 = 93 478,04 €.

$$60\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n = 93\,478,04 \rightarrow 60\,000 \cdot (1,03)^n = 93\,478,04 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1,03^n = \frac{93\,478,04}{60\,000} \rightarrow n = \frac{log\,1,56}{log\,1,03} \rightarrow n = 15 \text{ años}$$

5 **Un banco ofrece un 7 % anual. Ingresamos 12 000 € y los mantenemos 2 años. Calcula el dinero que tendremos tras los 2 años si los periodos de capitalización son mensuales. ¿Y si son semestrales? Calcula la T.A.E. en ambos casos.**

- Periodos de capitalización mensuales.

— Cálculo de la T.A.E.:

Al 7 % anual le corresponde un $\frac{7}{12}$ = 0,58333 % mensual.

En un año, el capital se multiplicará por:

$1,0058333^{12} = 1,07229\ldots \approx 1,0723 = 1 + \frac{7,23}{100}$

La T.A.E. es del 7,23 %.

— Cálculo del capital final tras 2 años:

$12\,000 \cdot (1,0723)^2 = 13\,797,93$ €

- Periodos de capitalización semestrales:

— Cálculo de la T.A.E.:

Al 7 % anual le corresponde un $\frac{7}{2} = 3{,}5$ % semestral.

En un año, el capital se multiplica por $1{,}035^2 = 1{,}071225 \approx 1 + \frac{7{,}12}{100}$

La T.A.E. es del 7,12 %.

— Cálculo del capital final tras 2 años:

$12\,000 \cdot (1{,}0712)^2 = 13\,769{,}63$ €.

6 **Pedimos un préstamo de 5 000 € al 5 % de interés semestral, que ha de ser devuelto al cabo de 3 años en un solo pago. ¿Cuál será el importe de dicho pago?**

Como 3 años son 6 semestres, el pago ascenderá a:

$$5\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 5\,000 \cdot (1{,}05)^6 = 6\,700{,}48 \text{ €}$$

7 **Hemos de amortizar 15 000 € en 3 años, a un interés anual del 10 %, de forma que cada año se paguen los intereses del capital pendiente más la tercera parte del capital total. Calcula el importe que hay que pagar cada año.**

	CAPITAL PENDIENTE	INTERESES	A PAGAR
1.er AÑO	15 000 €	15 000 · 0,1 = 1 500 €	5 000 + 1 500 = 6 500 €
2.º AÑO	10 000 €	10 000 · 0,1 = 1 000 €	5 000 + 1 000 = 6 000 €
3.er AÑO	5 000 €	5 000 · 0,1 = 500 €	5 000 + 500 = 5 500 €

El primer año pagaremos 6 500 €; el segundo año, 6 000 €, y el tercero, 5 500 €.

8 **Para la compra de un coche de 19 000 €, pedimos un préstamo al 7 % de interés anual que pagaremos en cuotas mensuales durante 6 años. ¿Cuál será dicha cuota?**

Aplicaremos la siguiente fórmula para calcular la mensualidad, m:

$$m = C \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}, \text{ donde } C = 19\,000, \; i = \frac{7}{1200} \text{ y } n = 6 \cdot 12 = 72$$

$$m = 19\,000 \cdot \frac{(1{,}00583)^{72} \cdot 0{,}00583}{(1{,}00583)^{72} - 1} = 323{,}89 \text{ €}$$